Forum Statistika dan Komputasi, Oktoberl 2005, p: 25 – 32 Vol. 10 No. 2
ISSN : 0853-8115

PENDUGAAN PRODUKTIVITAS KENTANG DENGAN METODE KEMUNGKINAN MAKSIMUM UNTUK MODEL ACAK

Hari Wijayanto, Khairil Anwar Notodiputro, Barizi

Departemen Statistika, FMIPA IPB

Edi Abdurrachman

Pusat Data dan Informasi Pertanian, Departemen Pertanian RI

Ringkasan

Metode kemungkinan maksimum merupakan salah satu metode yang paling umum digunakan untuk pendugaan parameter populasi. Dalam penerapannya pada model acak, metode kemungkinan maksimum menghadapi berbagai kendala dalam prosedur pendugaan parameter populasi terutama untuk kasus data yang tidak seimbang. Pada tulisan ini dibahas penggunakan metode kemungkinan maksimum pada model acak untuk pendugaan produktivitas komoditas kentang.

Keywords: : random model, maximum likelihood method, profile likelihood, backfitting algorithm, potatoe productivity

PENDAHULUAN

Pendugaan produktivitas komoditas hortikultura yang berbasis pada plot contoh, telah dikembangkan dan diujicoba oleh Pusat Data dan Informasi pertanian (Pusdatin) Deptan. Metode percontohan untuk menentukan plot contoh menggunakan *multi-stage sampling.* Untuk pendugaan pada level kabupaten, penarikan contohnya dimulai dari penentuan kecamatan contoh, kemudian dilanjutkan dengan penetuan desa, dusun, petani, petak, dan plot contoh. Penentuan kecamatan dan desa contoh serta banyaknya plot contoh yang dialokasikan proposional terhadap perkiraan luas panen.

Pada satu desa contoh hanya dipilih satu dusun contoh secara acak, kemudian pada satu dusun contoh dipilih petani contoh secara acak sebanyak jumlah plot contoh yang dialokasikan untuk desa contoh yang bersangkutan. Pada setiap petani contoh dipilih satu petak contoh, dan pada satu petak contoh ditentukan satu plot contoh. Dengan penerapan metode percontohan seperti ini, penentuan ragam dugaan menggunakan metode konvensional menjadi tidak dapat dilakukan karena ragam pada setiap tahap (*stage*) tidak dapat ditentukan.

Penerapan model pernarikan contoh seperti tersebut di atas sebenarnya dapat dimodelkan sebagai berikut:

$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$, i=1, 2, …, a dan j=1, 2, …, n_i (1)

dengan:

y_{ij} = respon (hasil ubinan) pada dusun ke-i, petani ke-j

μ = rataan umum

α_i = pengaruh dusun ke-i

ε_{ij} = galat pada dusun ke-i, petani ke-j

Asumsi yang umum digunakan untuk model ini adalah antar ε_{ij} saling bebas dan menyebar normal dengan nilai tengah 0 dan ragam σ^2. Sedangkan faktor dusun, karena merupakan contoh acak dari berbagai kemungkinan dusun yang ada, biasanya disebut sebagai faktor acak (*random factor*) dan diasumsikan: $\alpha_i \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$. Dengan asumsi ini bahwa α_i bebas terhadap ε_{ij} maka ragam dari suatu observasi atau pengamatan menjadi: $V(y_{ij}) = \sigma_\alpha^2 + \sigma^2$.

Ragam σ_α^2 dan σ^2 disebut sebagai komponen ragam. Sedangkan model yang faktornya acak seperti ini disebut sebagai komponen ragam atau model pengaruh acak (Montgomery, 1991).

Kasus di atas akan lebih rumit jika pada satu petani dapat dilakukan pengambilan plot contoh lebih dari satu plot. Sehingga model (1) akan menjadi model tersarang (*nested*) sebagai berikut:

ISSN : 0853-8115

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk} \, ,$$

i=1, 2, …, a; j=1, 2, …, b_i; dan k=1, 2, …, n_{ij} (2)

dengan:

y_{ijk} = respon (hasil plot) pada dusun ke-i, petani ke-j, dan plot ke-k

μ = rataan umum

α_i = pengaruh dusun ke-i

$\beta_{j(i)}$ = pengaruh petani ke-j pada dusun ke-i

ε_{ijk} = galat pada dusun ke-i, petani ke-j, dan plot ke-k.

Dengan asumsi α_i, $\beta_{j(i)}$ dan ε_{ij} saling bebas, maka untuk kasus model ini ragam dari suatu observasi atau pengamatan menjadi: $V(y_{ijk}) = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma^2$

Asumsi yang berlaku sama dengan model (4.1) dengan tambahan asumsi untuk faktor petani adalah $\beta_{j(i)} \sim N(0, \sigma_\beta^2)$. Untuk kasus dua faktor yang bersifat acak seperti ini, pendugaan parameter akan berfokus pada pendugaan terhadap μ dan komponen ragam σ_α^2, σ_β^2, dan σ^2. Metode yang umum digunakan untuk menduga parameter-parameter ini adalah metode kuadrat terkecil (ANOVA) dan metode kemungkinan maksimum.

Pada berikutnya akan dibahas tentang pendugaan parameter menggunakan metode kemungkinan maksimum untuk kedua model di atas. Pembahasan akan diawali untuk kasus jumlah ulangan sama, kemudian dilanjutkan dengan kasus ulangan dan jumlah level faktor yang berbeda. Pada bagian akhir diberikan contoh penerapan pada kasus komoditas kentang.

PENDUGAAN DENGAN METODE KEMUNGKINAN MAKSIMUM

Model Acak Satu Faktor

Penduga kemungkinan maksimum bagi parameter $\theta = (\mu, \sigma^2, \sigma_\alpha^2)$ model (1) dapat diperoleh dari fungsi kemungkinannya sebagai berikut:

$$L(\theta) = \frac{\exp[-\tfrac{1}{2}(y - \mu 1)' V^{-1} (y - \mu 1)]}{(2\pi)^{\frac{1}{2}N} \, |V|^{\frac{1}{2}}}$$

dimana

$$|V| = \prod_{i=1}^{a} \sigma^{2(n_i - 1)} (\sigma^2 + n_i \sigma_\alpha^2)$$

dan

$$V^{-1} = \frac{I_{n_i}}{\sigma^2} - \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma^2(\sigma^2 + n_i\sigma_\alpha^2)} J_{n_i}$$

(Searle *et al.*, 1992).

Dengan demikian fungsi kemungkinan di atas dapat dituliskan menjadi:

$$L(\theta) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_i\sum_j (y_{ij} - \mu)^2 - \sum_i \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma^2 + n_i\sigma_\alpha^2}(y_{i.} - n_i\mu)^2\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}N} \sigma^{2[\frac{1}{2}(N-a)]} \prod_{i=1}^{a} (\sigma^2 + n_i\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Sehingga log dari fungsi kemungkinannya menjadi:

$$\log L = -\frac{N}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}(N-a)\log\sigma^2 - \frac{1}{2}\sum_i \log(\sigma^2 + n_i\sigma_\alpha^2)$$

$$- \frac{\sum_i\sum_j (y_{ij} - \mu)^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_i \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma^2 + n_i\sigma_\alpha^2}(y_{i.} - n_i\mu)^2 \qquad (3)$$

<u>Kasus jumlah ulangan sama</u>

Untuk kasus ulangan sama berarti $n_i = n$ untuk setiap i, dengan demikian log fungsi kemungkinan (3) menjadi:

$$\log L = -\frac{N}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}a(n-1)\log\sigma^2 - \frac{1}{2}a\log(\sigma^2 + n\sigma_\alpha^2)$$

$$- \frac{\sum_i\sum_j (y_{ij} - \mu)^2}{2\sigma^2} + \frac{n^2\sigma_\alpha^2 \sum_i (\bar{y}_{i.} - \mu)^2}{2\sigma^2(\sigma^2 + n\sigma_\alpha^2)} \qquad (4)$$

Dua suku terakhir dari persamaan (4) di atas jika diekspresikan dalam bentuk JKA dan JKG menjadi sebagai berikut (Wijayanto, 2005):

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left[JKG + \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + n\sigma_\alpha^2}[JKA + an(\bar{y}_{..} - \mu)^2]\right]$$

.karena penduga kemungkinan maksimum dari suatu fungsi parameter sama dengan fungsi dari penduga kemungkinan maksimum dari parameter, kita dapat menyederhanakan notasi dengan menuliskan:

$$\lambda = \sigma^2 + n\sigma_\alpha^2$$

ISSN : 0853-8115

Sehingga persamaan (4) menjadi:

$$\log L = -\frac{N}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}a(n-1)\log\sigma^2 - \frac{1}{2}a\log\lambda - \frac{JKG}{2\sigma^2} - \frac{JKA}{2\lambda} - \frac{an(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{2\lambda}.$$

Dengan menurunkan secara parsial terhadap μ, σ^2 dan λ dan mengevaluasi ketiga persamaan ini pada nilai 0, memberikan penduga kemungkinan maksimum sebagai berikut:

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$$

$$\hat{\sigma}^2 = KTG \quad \text{dan}$$

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{(1-1/a)KTA - KTG}{n}$$

dimana $KTA = \dfrac{JKA}{(a-1)}$ dan $KTG = \dfrac{JKG}{a(n-1)}$.

Penduga $\hat{\sigma}^2$ ternyata merupakan penduga yang tak bias terhadap σ^2, sedangkan $\hat{\sigma}_\alpha^2$ merupakan penduga yang berbias terhadap σ_α^2 karena

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 \qquad \text{sedangkan}$$

$$E(\hat{\sigma}_\alpha^2) = (1-\frac{1}{a})\sigma_\alpha^2 - \frac{1}{an}\sigma^2.$$

Penduga $\hat{\sigma}^2$ dan ragam $\hat{\sigma}^2$ yang dihasilkan oleh metode kuadrat terkecil (ANOVA) dan metode kemungkinan maksimum ternyata sama, sedangkan penduga $\hat{\sigma}_\alpha^2$ yang dihasilkan oleh kedua metode tersebut berbeda.

Pada beberapa kasus dimungkinkan diperolehnya penduga komponen ragam $\hat{\sigma}_\alpha^2$ yang negatif. Oleh karena itu, untuk memperoleh nilai harapan penduga kemungkinan maksimumnya lebih sulit karena tergantung dari nilai $\hat{\sigma}_\alpha^2$ apakah positif atau negatif (Searle *et al.*, 1992).

Selanjutnya, untuk menghindari mendapatkan penduga yang negatif, Searle *et al.* (1992) memberikan penduga kemungkinan maksimum bagi $\hat{\sigma}^2$ dan $\hat{\sigma}_\alpha^2$ sebagai berikut:

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \begin{cases} [(1-1/a)KTA - KTG]/n; & \text{untuk } (1-1/a)KTA \ge KTG \\ 0 & \text{selainnya} \end{cases}$$

dan

$$\hat{\sigma}^2 = \begin{cases} KTG; & \text{untuk } (1-1/a)KTA \ge KTG \\ \dfrac{JKT}{an}; & \text{untuk selainnya}. \end{cases}$$

Ragam dari masing-masing penduga $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2$, dan $\hat{\sigma}_\alpha^2$ dapat diperoleh melalui nilai harapan dari turunan kedua log fungsi kemungkinannya sehingga menghasilkan ragam sebagai berikut:

$$ragam(\hat{\mu}) = \frac{\hat{\sigma}^2 + n\hat{\sigma}_\alpha^2}{an}$$

$$ragam\begin{bmatrix}\hat{\sigma}^2 \\ \hat{\sigma}_\alpha^2\end{bmatrix} \cong 2\sigma^4 \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a(n-1)} & -\dfrac{1}{an(n-1)} \\ -\dfrac{1}{an(n-1)} & \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{\lambda^2/\sigma^4}{a} + \dfrac{1}{a(n-1)}\right) \end{bmatrix}$$

<u>Kasus jumlah ulangan tidak sama</u>

Penurunan penduga kemungkinan maksimum untuk kasus ulangan tidak sama akan mengacu pada log fungsi kemungkinan yang dituliskan pada persamaan (3). Dengan menotasikan kembali $\lambda_i = \sigma^2 + n_i\sigma_\alpha^2$ dan mengekspresikan fungsi tersebut dalam bentuk JKG dan JKA, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\log L = -\frac{N}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}(N-a)\log\sigma^2 - \frac{1}{2}\sum_i \log\lambda_i - \frac{JKG}{2\sigma^2} - \sum_i \frac{n_i(\bar{y}_{i.}-\mu)^2}{2\lambda_i}$$

(5)Dengan menurunkan secara parsial terhadap μ, σ^2 dan λ dan mengevaluasi fungsi turunan terhadap μ di atas terhadap 0, diperoleh penduga kemungkinan maksimum bagi μ sebagai berikut:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_i \dfrac{n_i\bar{y}_{i.}}{\hat{\lambda}_i}}{\sum_i \dfrac{n_i}{\hat{\lambda}_i}} = \frac{\sum_i \dfrac{n_i\bar{y}_{i.}}{\hat{\sigma}^2 + n_i\hat{\sigma}_\alpha^2}}{\sum_i \dfrac{n_i}{\hat{\sigma}^2 + n_i\hat{\sigma}_\alpha^2}} = \frac{\sum_i \dfrac{\bar{y}_{i.}}{\text{var}(\bar{y}_{i.})}}{\sum_i \dfrac{1}{\text{var}(\bar{y}_{i.})}}$$

dimana: $ragam(\bar{y}_{i.}) = \hat{\sigma}_\alpha^2 + \hat{\sigma}^2/n_i$.

Sedangkan untuk kasus ulangan tidak sama, solusi secara analitik bagi penduga kemungkinan maksimum σ^2 dan σ_α^2 tidak dapat diperoleh (Searle *et al.*, 1992).

Ragam dari masing-masing penduga ini dapat diperoleh melalui nilai harapan dari turunan kedua log fungsi kemungkinannya sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$ragam(\hat{\mu}) = \left(\sum_i \frac{n_i}{\lambda_i}\right)^{-1} = \left(\sum_i \frac{n_i}{\sigma^2 + n_i\sigma_\alpha^2}\right)^{-1}$$

$$ragam\begin{bmatrix}\hat{\sigma}^2\\ \hat{\sigma}^2_\alpha\end{bmatrix} \cong \frac{2}{D}\begin{bmatrix}\sum_i \frac{n_i^2}{\lambda_i^2} & -\sum_i \frac{n_i}{\lambda_i^2}\\ -\sum_i \frac{n_i}{\lambda_i^2} & \frac{N-a}{\sigma^4}+\sum_i \frac{1}{\lambda_i^2}\end{bmatrix}$$

Dimana

$D = \frac{N-a}{\sigma^4}\sum_i \frac{n_i^2}{\lambda_i^2} + \sum_i \frac{1}{\lambda_i^2}\sum_i \frac{n_i^2}{\lambda_i^2} - \left(\sum_i \frac{n_i}{\lambda_i^2}\right)^2$.Untuk jumlah ulangan tidak sama, penduga parameter bagi komponen ragam pada umumnya tidak dapat diperoleh melalui rumus jadi (*closed form*) (Searle *et al*., 1992). Salah satu metode yang dapat digunakan untuk memperoleh penduga bagi komponen ragamnya untuk kasus ulangan tidak sama adalah algoritma *iterative backfitting* seperti yang digunakan oleh Pawitan (2001). Pada bagian ini akan diuraikan metode pendugaan bagi σ^2 dan σ^2_α menggunakan algoritma iteratif yang dikembangkan dari Pawitan (2001).

Secara umum, model (1) jika dituliskan dalam bentuk matriks akan menjadi:

$$y = 1\mu + Zb + e$$

Dengan asumsi $b \sim N(0, D)$ dan $e \sim N(0, \Sigma)$, sedangkan $y \sim N(\mu 1, V)$ dimana

$$V = \Sigma + ZDZ'$$

Log fungsi kemungkinan pada parameter fixed (μ, θ) dimana $\theta = \sigma^2, \sigma^2_\alpha$ adalah

$$\log L(\mu,\theta) = -\frac{1}{2}\log|V| - \frac{1}{2}(y-\mu 1)'V^{-1}(y-\mu 1)$$

Pada nilai θ yang tetap, turunan pertama fungsi ini terhadap μ dan mengevaluasinya pada nilai 0 menghasilkan penduga μ sebagai berikut:

$$\hat{\mu} = (1'V^{-1}1)^{-1}1'V^{-1}y$$

Profil *likelihood* dari parameter θ adalah

$$\log L(\theta) = -\frac{1}{2}\log|V| - \frac{1}{2}(y-\hat{\mu}1)'V^{-1}(y-\hat{\mu}1) \qquad (6)$$

Log-*likelihood* seluruh parameter model $(\mu, b, \theta$ dengan $\theta = \sigma^2, \sigma^2_\alpha)$ dapat ditentukan berdasarkan sebaran bersama dari (y, b), yaitu

$$L(\mu,\theta,b) = p(y\,|\,b)p(b)$$

Sebaran bersyarat y jika diketahui b adalah normal dengan nilai tengah $E(y\,|\,b) = \mu 1 + Zb$ dan ragam Σ. Sedangkan b menyebar normal dengan nilai tengah 0 dan ragam D, sehingga

$$\log L(\mu,\theta,b) = \frac{1}{2}\log|\Sigma| \quad \frac{1}{2}(y \quad 1\mu \quad Zb)'\Sigma \;\; 1$$
$$x(y \quad 1\mu \quad Zb) \quad \frac{1}{2}\log|D| \quad \frac{1}{2}b'D \;\; 1b$$

Dengan berpedoman bahwa (Pawitan, 2001) :

$$V^{-1} = \Sigma^{-1} - \Sigma^{-1}Z(Z'\Sigma^{-1}Z + D^{-1})^{-1}Z'\Sigma^{-1}$$
$$\hat{b} = DZ'V^{-1}(y-\mu 1)$$
$$V^{-1}(y-\mu 1) = \Sigma^{-1}(y-\mu 1 - Z\hat{b})$$
$$(y-\mu 1)'V^{-1}(y-\mu 1) = (y-\mu 1 - Z\hat{b})'\Sigma^{-1}(y-\mu 1 - Z\hat{b}) + \hat{b}'D^{-1}\hat{b}$$
$$|V| = |\Sigma|\,|{-Z'}\Sigma^{-1}Z + D^{-1}|$$

Maka persamaan (6) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\log L(\theta) = \frac{1}{2}\log|\Sigma| \quad \frac{1}{2}(y \quad \hat{\mu} \quad Z\hat{b})'\Sigma \;\; 1$$
$$x(y \quad \hat{\mu} \quad Z\hat{b}) \quad \frac{1}{2}\log|D| \quad \frac{1}{2}\hat{b}'D \;\; 1b$$
$$-\frac{1}{2}\log|Z'\Sigma^{-1}Z + D^{-1}|$$

$$\log L(\theta) = \log L(\hat{\mu},\theta,\hat{b}) - \frac{1}{2}\log|Z'\Sigma^{-1}Z + D^{-1}|$$

.

Dari persamaan ini terlihat bahwa $\log L(\theta)$ merupakan modifikasi $\log L(\hat{\mu},\theta,\hat{b})$ dengan menambahkan persamaan $-\frac{1}{2}\log|Z'\Sigma^{-1}Z + D^{-1}|$ yang tidak lain merupakan informasi Fisher dari b. Selanjutnya, untuk mendapatkan penduga bagi μ, b, dan komponen ragam σ^2 dan σ^2_α dapat dilakukan melalui prosedur iteratif.

Dengan mengasumsikan: $\Sigma = \sigma^2 A$ dan $D = \sigma^2_b R$, dimana A dan R merupakan matriks yang diketahui dan berpangkat N dan q (pada banyak aplikasi, matriks A dan R merupakan matriks identitas). Dengan demikian, untuk memperoleh penduga parameter tersebut, fungsi tujuan yang harus dimaksimumkan adalah

$$Q = \frac{N}{2}\log\sigma^2 \quad \frac{1}{2\sigma^2}e'A \;\; 1e \quad \frac{q}{2}\log\sigma^2_b \quad \frac{q}{2\sigma^2_b}$$
$$\log b'R \;\; 1b \quad \frac{1}{2}\log|\sigma \;\; 2Z'A \;\; 1Z + \sigma_b \;\; 2R \;\; 1|$$

dimana $e = y - \mu 1 - Zb$.

Turunan Q terhadap σ^2 dan σ^2_α kemudian mengevaluasi masing-masing pada nilai 0, dan mengisolasi nilai σ^2 dan σ^2_α maka diperoleh persamaan iteratif sebagai berikut:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}[e'A^{-1}e + teras\{(\sigma^{-2}Z'A^{-1}Z + \sigma_b^{-2}R^{-1})^{-1}Z'A^{-1}Z\}]$$

$$\sigma^2_b = \frac{1}{q}[b'R^{-1}b + teras\{(\sigma^{-2}Z'A^{-1}Z + \sigma_b^{-2}R^{-1})^{-1}R^{-1}\}]\,.$$

Dengan demikian, prosedur iteratif untuk menduga μ, b, dan komponen ragam σ^2 dan σ_α^2 adalah sebagai berikut:

1. Tentukan nilai awal σ^2, σ_b^2, μ dan b (Nilai awal bagi σ^2 dan σ_b^2 dapat diambil dari penduga kuadrat terkecil, sedangkan nilai awal untuk $b = 0$)
2. Hitung:
$$\hat{\mu} = \frac{\sum_i \frac{n_i \bar{y}_{i.}}{\sigma^2 + n_i\sigma_\alpha^2}}{\sum_i \frac{n_i}{\sigma^2 + n_i\sigma_\alpha^2}}$$
Hitung vektor data terkoreksi
$$y^c = y - \mu 1 - Zb$$
dan hitung nilai b melalui persamaan
$$b = (Z'\Sigma^{-1} Z + D^{-1})^{-1} Z'\Sigma^{-1} y^c$$
3. Hitung: $e = y - \mu 1 - Zb$
4. Hitung nilai komponen ragam baru menggunakan:
$$\sigma^2 = \frac{1}{N}[e'A^{-1}e + teras\{(\sigma^{-2}Z'A^{-1}Z + \sigma_b^{-2}R^{-1})^{-1}Z'A^{-1}Z\}]$$
$$\sigma_b^2 = \frac{1}{q}[b'R^{-1}b + teras\{(\sigma^{-2}Z'A^{-1}Z + \sigma_b^{-2}R^{-1})^{-1}R^{-1}\}]$$
Dimana nilai σ^2 dan σ_b^2 sebelah kanan mengambil nilai pada iterasi sebelumnya.
5. Ulangi 2-5 sampai konvergen.

Algoritma *iterative backfitting* di dalam aljabar linier lebih dikenal dengan sebutan metode Jacobi atau Gauss-Seidel. Menurut Anton (1987), metode Jacobi atau Gauss-Seidel terkadang berjumpa dengan kondisi yang divergen atau tidak konvergen, sehingga metode ini tidak selalu memberikan solusi. Pemilihan ekspresi dari persamaan parameter yang akan diduga dapat membantu diperolehnya kondisi yang konvergen.

Model Acak Tersarang Dua Faktor

Kasus Jumlah Taraf dan Ulangan Sama

Model (2) untuk jumlah taraf & ulangan sama dapat dituliskan sebagai:

$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$, i=1, 2, …, a; j=1, 2, …, b; dan k=1, 2, …, n

Dengan asumsi : $\alpha_i \sim N(0,\sigma_\alpha^2)$, $\beta_{ij} \sim N(0,\sigma_\beta^2)$, $\varepsilon_{ijk} \sim N(0,\sigma^2)$.

Seperti ditunjukkan dalam Wijayanto (2005), rumus umum tabel analisis ragamnya dapat dituliskan seperti Tabel 1. Berdasarkan model dan tabel analisis ragam tersebut, fungsi kemungkinan bagi μ, σ_1^2, σ_{12}^2, dan σ_{123}^2 adalah sebagai berikut (Tiao & Box, 1967) :

$$L(\mu,\sigma_1^2,\sigma_{12}^2,\sigma_{123}^2) \propto (\sigma_1^2)^{-\frac{1}{2}v_1}(\sigma_{12}^2)^{-\frac{1}{2}v_2}(\sigma_{123}^2)^{-\frac{1}{2}(v_3+1)} \times \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{bn\sum(\bar{y}_{i..}-\mu)^2}{\sigma_{123}^2} + \frac{v_2 m_2}{\sigma_{12}^2} + \frac{v_1 m_1}{\sigma_1^2}\right\}\right] \quad (7)$$

Log dari fungsi kemungkinan persamaan (7) ini menjadi:

$$\log L(\mu,\sigma_1^2,\sigma_{12}^2,\sigma_{123}^2) = -\frac{1}{2}v_1\log\sigma_1^2 - \frac{1}{2}v_2\log\sigma_{12}^2 - \frac{1}{2}(v_3+1)\log\sigma_{123}^2 - \frac{1}{2}\left\{\frac{bn\sum(\bar{y}_{i..}-\mu)^2}{\sigma_{123}^2} + \frac{v_2 m_2}{\sigma_{12}^2} + \frac{v_1 m_1}{\sigma_1^2}\right\}$$

Turunan pertama fungsi ini terhadap μ, σ_1^2, σ_{12}^2, dan σ_{123}^2 dan mengevaluasi persamaan yang diperoleh terhadap 0 menghasilkan

(a) $\hat{\mu} = \bar{y}_{...}$

(b) $\hat{\sigma}^2 = m_1 = KTG$

Tabel 1 Tabel analisis ragam untuk model acak tersarang dua faktor dengan ulangan sama

JK	db	KT	E(KT)
$S_3 = bn\sum(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$	v_3	$m_3 = S_3/v_3$	$\sigma_{123}^2 = \sigma^2 + n\sigma_\beta^2 + bn\sigma_\alpha^2$
$S_2 = n\sum\sum(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2$	v_2	$m_2 = S_2/v_2$	$\sigma_{12}^2 = \sigma^2 + n\sigma_\beta^2$
$S_1 = \sum\sum\sum(\bar{y}_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$	v_1	$m_1 = S_1/v_1$	$\sigma_1^2 = \sigma^2$

Keterangan: $v_1 = ab(n-1)$, $v_2 = a(b-1)$, $v_3 = (a-1)$,
$m_1 = KTG$, $m_2 = KTB$, $m_3 = KTA$

ISSN : 0853-8115

(c) $\hat{\sigma}^2_{12} = m_2$

$$\hat{\sigma}^2 + n\hat{\sigma}^2_\beta = m_2$$

$$\hat{\sigma}^2_\beta = \frac{m_2 - \hat{\sigma}^2}{n} = \frac{KTB - KTG}{n}$$

(d) $\hat{\sigma}^2_{123} = \dfrac{bn\sum(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2}{v_3 + 1} = \dfrac{v_3 m_3}{v_3 + 1}$

$$\hat{\sigma}^2 + n\hat{\sigma}^2_\beta + bn\hat{\sigma}^2_\alpha = \frac{v_3 m_3}{a}$$

$$\hat{\sigma}^2_\alpha = \frac{\frac{v_3 m_3}{a} - \hat{\sigma}^2 - n\hat{\sigma}^2_\beta}{bn}$$

$$\hat{\sigma}^2_\alpha = \frac{\frac{JKA}{a} - KTG - n\left(\frac{KTB - KTG}{n}\right)}{bn} = \frac{JKA/a - KTB}{bn}.$$

Permasalahan yang dihadapi dalam pendugaan komponen ragam pada model acak tersarang adalah adanya kemungkinan diperolehnya penduga ragam yang negatif. Searle *et al.* (1992) memberikan penduga kemungkinan maksimum bagi komponen ragam agar tidak diperoleh nilai yang negatif.

Ragam bagi $\hat{\mu}$ dapat diperoleh melalui turunan kedua dari fungsi $\log L$ yaitu:

$$ragam(\hat{\mu}) = \frac{\hat{\sigma}^2 + n\hat{\sigma}^2_\beta + bn\hat{\sigma}^2_\alpha}{abn}.$$

<u>Kasus Data Tidak Seimbang (Jumlah Taraf dan Ulangan Tidak Sama)</u>

Menurut Searle *et al.* (1992), tidak ada bentuk tertutup (*closed form)* persamaan penduga kemungkinan maksimum bagi komponen ragam pada model tersarang dua faktor (model 2) untuk kasus jumlah ulangan yang tidak sama. Khusus untuk penduga bagi μ, Searle (1970) telah menurunkan penduga kemungkinan maksimumnya sebagai berikut:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{a} \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}}{m_{ij}} \bar{y}_{ij.}}{\sum_{i=1}^{a} \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}}{m_{ij}}} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} k_{ij}\bar{y}_{ij.}}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} k_{ij}}.$$

dimana

$$1/k_{ij} = \left(\sigma^2_\beta + \sigma^2_e/n_{ij}\right)\left(1 + \sigma^2_\alpha \sum_j \frac{1}{\sigma^2_\beta + \sigma^2_e/n_{ij}}\right).$$

Sedangkan ragamnya adalah sebagai berikut:

$$Var(\hat{\mu}) = 1/1'V^{-1}1 = 1\Big/\sum_{i=1}^{a} \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}}{m_{ij}}$$

Dimana: $m_{ij} = n_{ij}\sigma^2_\beta + \sigma^2_e$

$$q_i = 1 + \sigma^2_\alpha \sum_{j=1}^{c_i} \frac{n_{ij}}{m_{ij}}.$$

PENERAPAN

Data yang digunakan adalah data hasil ujicoba penentuan produktivitas komoditas hortikultura yang telah dilakukan oleh Pusdatin Departemen Pertanian pada Tahun 2002 di Kabupaten Brebes. Jumlah plot contoh sebenarnya adalah 40 plot yang tersebar di dua kecamatan dan lima desa. Data ini disajikan pada Tabel 7 dalam Wijayanto (2005), yang akan digunakan sebagai contoh analisis untuk kasus jumlah ulangan tidak sama. Sedangkan untuk kasus jumlah ulangan sama (jumlah petani atau plot contoh per dusun sama) menggunakan data Tabel 16 dalam Wijayanto (2005). Hasil analisis ragam (metode kuadrat terkecil) terhadap data ulangan sama adalah sebagai berikut:

Sumber	**DB**	**JK**	**KT**	**F**	**P**
Dususn	4	124.3567	31.0892	6.681	0.001
Petani	25	116.3300	4.6532		
Total	29	240.6867			

Komponen Ragam

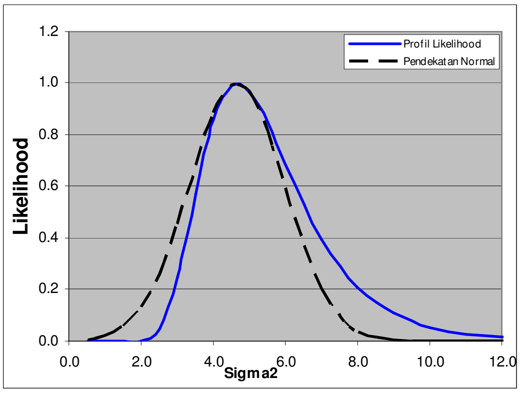
Sumber	**Komp.Ragam**	**%Total**	**StDev**
Dususn	4.406	48.64	2.099
Petani	4.653	51.36	2.157
Total	9.059	3.010	

Berdasarkan tabel analisis ragam di atas dan dengan hipotesis H$_0$: $\sigma^2_\alpha = 0$ vs H$_1$: $\sigma^2_\alpha > 0$ dapat disimpulkan bahwa H$_0$ ditolak, artinya produktivitas antar dusun nyata beragam. Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa penduga bagi ragam galat (σ^2) dan ragam antar dusun (σ^2_α) masing-masing sebesar 4.653 dan 4.406.

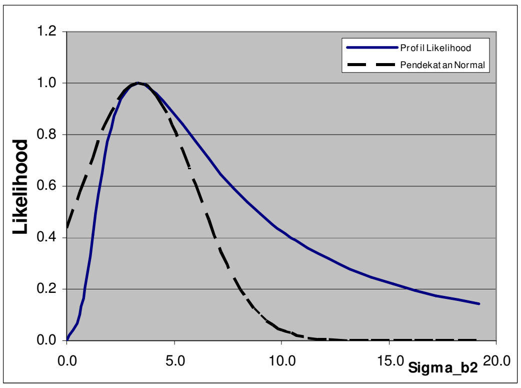
Dengan menggunakan metode kemungkinan maksimum ternyata diperoleh penduga bagi σ^2 dan σ^2_α masing-masing sebesar 4.653 dan 3.370, sedangkan penduga bagi μ dan $\mathrm{var}(\hat{\mu})$ masing-masing sebesar 25.267 dan 0.829. Dari hasil ini terlihat bahwa hasil dugaan σ^2_α metode kuadrat terkecil berbeda dengan

ISSN : 0853-8115

metode kemungkinan maksimum, sedangkan hasil dugaan terhadap σ^2 sama.



Gambar 1. Perbandingan fungsi kemungkinan bagi σ^2 dengan fungsi kemungkinan asimtotik normal



Gambar 2 . Perbandingan fungsi kemungkinan bagi σ_α^2 dengan fungsi kemungkinan asimtotik normal

Dengan menggunakan kebalikan matriks informasi Fisher, diperoleh ragam bagi σ^2 dan σ_α^2 masing-masing sebesar 1.720 dan 6.873. Sesuai dengan teori asimtotik normal, sebaran kedua komponen ragam tersebut adalah $\hat{\sigma}^2 \sim N(\sigma^2,\ 1.720)$ dan $\hat{\sigma}_\alpha^2 \sim N(\sigma_\alpha^2,\ 6.873)$. Dengan demikian selang kepercayaan 95% bagi σ^2 dan σ_α^2 masing-masing adalah (2.082, 7.224) dan (-1.769, 8.508). Khusus untuk σ_α^2, selang kepercayaannya mencakup nilai 0, berarti bertentangan dengan hasil pengujian menggunakan analisis ragam.

Perbandingan fungsi kemungkinan bagi σ^2 dan σ_α^2 dengan fungsi kemungkinan asimtotik normal disajikan pada Gambar 1 dan Gambar 2. Dari hasil perbandingan ini dapat dilihat bahwa ternyata pendekatan fungsi kemungkinan normal cukup baik untuk σ^2, tetapi berbeda cukup jauh untuk σ_α^2. Salah satu penyebab ketidakkonsistenan hasil pengujian analisis ragam dengan metode kemungkinan maksimum terhadap σ_α^2 adalah adanya korelasi *interclass* yang cukup tinggi (Pawitan, 2001). Besarnya nilai korelasi *interclass* pada data contoh tersebut di atas adalah:

$$cor(y_{ij}, y_{ik}) = \frac{\hat{\sigma}_\alpha^2}{\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_\alpha^2} = 0.42$$

Hasil analisis ragam (metode kuadrat terkecil) terhadap data dengan ulangan tidak sama adalah sebagai berikut:

Sumber	**DB**	**JK**	**KT**
Dusun	4	204.0576	51.0144
Petani	35	129.9934	3.7141
Total	39	334.0510	

Komponen Ragam

Sumber	**Komp.Ragam**	**%Total**	**StDev**
Dusun	6.074	62.05	2.465
Petani	3.714	37.95	1.927
Total	9.788		3.129

Dari hasil analisis ragam diperoleh penduga kuadrat terkecil bagi σ^2 dan σ_α^2 masing-masing adalah 3.714 dan 6.074. Sedangkan menggunakan metode kemungkinan maksimum diperoleh penduga bagi σ^2 dan σ_α^2 masing-masing adalah 3.701 dan 3.867 (program perhitungan penduga σ^2 dan σ_α^2 menggunakan bahasa R dapat dilihat dalam Wijayanto, (2005)). Dari hasil pendugaan terhadap σ^2 ternyata kedua metode memberikan hasil yang relatif sama, tetapi terhadap σ_α^2 ternyata kedua metode memberikan perbedaan hasil yang cukup jauh. Sedangkan penduga kemungkinan maksimum bagi μ dan $\text{var}(\hat{\mu})$ masing-masing sebesar 25.305 dan 0.873.

DAFTAR PUSTAKA

Anton H. 1987. Elementary Linear Algebra, 5th ed. John Wiley& Sons, New York.

Baltagi BH, Song SH, and Jung BC. 1999. The Unbalanced Nested Error Component Regression Model.

Dempster, AP, Laird NM, Rubin DB. 1977. Maximum Likelihood Estimation from Incomplete Data Via the EM Algorithm

ISSN : 0853-8115

(with discussion). J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 39, 1-38.

Harvey WR. 1970. Estimation of Variance Component in The Mixed Model. Biometrics September 1970: 485-504.

Khattree R. 1999. Nonnegative Estimation of Variance Components: A Modification to Henderson's Anova Methodology. The Indian Journal of Sttatistics, Volume 61, Series B, Pt. 2, pp. 261-265.

Levy PS, Lemeshow S. 1999. Sampling of Population, Methods and Application. 3rd. John Wiley & Sons, New York.

Montgomery DC. 1991. Design and Analysis of Experiments. 3rd ed. John Wiley and Sons, New York.

Murthy MN. 1967. Sampling Theory and Methods. Statistical Publishing Society.

Pawitan Y. 2001. In All Likelihood, Statistical Modelling and Inference Using Likelihood. Clarendon Press, Oxford.

Pusat dan Informasi Pertanian. 2003. Uji Metodologi Produktivitas Sayuran di Propinsi Jawa Barat dan Jawa Tengah. Pusat Data dan Informasi Pertanian, Departemen Pertanian, Jakarta.

Searle SR. 1970. Large Sample Variances of Maximum Likelihood Estimator of Variance Components Using Unbalanced Data. Biometrics, September 1970: 505-524.

Searle SR, Casella G, McCullach CE. 1992. Variance Components. John Wiley & Sons, Canada.

Tiao GC, Box GEP. 1967. Bayesian Analysis of Three-Component Hierarchical Design Model. Biometrika, Vol. 54, No. 1 & 2, p.109-125.

Wijayanto H. 2005. Pendekatan Kemungkinan Maksimum dan Bayes untuk Pendugaan Produktivitas Komoditas Hortikultura (Kasus Komoditas Kentang). Disertasi Sekolah Pascasarjana IPB. Bogor. (Tidak dipublikasikan).

⊗