

PENENTUAN KOEFISIEN DISPERSI HIDRODINAMIK TRANSPORTASI LARUTAN DALAM TANAH MENGGUNAKAN METODE INVERSE PROBLEM

*(Determination of Hydrodynamic Dispersion Coefficient
of Solute Transport in Soil Using Inverse Problem Method)*

Hermantoro ¹⁾ dan B.I. Setiawan ²⁾

ABSTRACT

*Solute transport in porous medium is affected by two parameters i.e. : 1) average velocity of solute particle, and 2) solute dispersion. Theoretically, the solute transport can be describes by Convective Dispersion Equation, when the hydrodynamic dispersion coefficient (D_{sh}) is given. There are some available methods to determine D_{sh} . In this paper we present a modified method of **inverse problem** to calculate D_{sh} from measured data of concentration profiles. Verification was carried out analytically. The results indicated that the inverse problem much or less matched with the analytical solution.*

Key words : solute transport, hydrodynamic dispersion, inverse problem

LATAR BELAKANG

Transportasi larutan dalam media porus ditentukan oleh dua parameter, yaitu : 1) rerata kecepatan partikel larutan, dan 2) dispersi larutan (Feyen *et al.*, 1998). Dispersi larutan digerakkan oleh dua entitas, yakni : 1) difusi molekuler dan 2) dispersi hidrodinamik. Dengan menggunakan pendekatan *continuum*, persamaan konveksi – dispersi untuk larutan *non-adsorbing* dan *non-degradable*, adalah sebagai berikut (Hillel, 1980) :

$$\theta \frac{\partial c}{\partial t} = D_{sh} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v\theta \frac{\partial c}{\partial x} \dots\dots\dots (1)$$

dimana :

- θ : kadar air volumetric (cm^3/cm^3)
- C : konsentrasi larutan (gram/cm^3)
- \bar{v} : rerata kecepatan aliran larutan (cm/dt)
- x : arah aliran (cm)

t : waktu pengaliran (dt)

D_{sh} : Koefisien dispersi hidrodinamik

Pada fenomena transportasi larutan terminology difusi digunakan sebagai penyebaran partikel pada keadaan air diam (stagnant water), sedangkan dispersi digunakan pada keadaan air mengalir (Apeplo dan Postma, 1993). Pada prakteknya fenomena difusi dan dispersi tidak dapat dipisahkan, maka Hillel (1980) menggabungkan koefisien difusi dan dispersi sebagai koefisien difusi-dispersi. Noborio *et al* (1996) menyebutkan koefisien tersebut sebagai koefisien dispersi hidrodinamik yang dinyatakan sebagai jumlah efek dari difusi molekuler dan konveksi. Koefisien ini dapat ditentukan melalui Breakthrough Curve (Yamaguchi *et al*, 1989) atau dengan menggunakan persamaan CDE secara analitik dan numeric (Bear dan Verruijt, 1987).

1) Dosen Fateta INSTIPER Yogyakarta, mahasiswa PPs TEP IPB

2) Staf Pengajar Jurusan Teknik Pertanian, Fakultas Teknologi Pertanian, IPB

BAHAN DAN METODE

Penyelesaian analitik untuk persamaan (1) dalam kolom tanah panjang tak terhingga adalah :

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left\{ \frac{x - v.t}{\sqrt{4D_{sh}.t}} \right\} + \exp \left(\frac{x.v}{D_{sh}} \right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x + v.t}{\sqrt{4D_{sh}.t}} \right\} \right] \quad (2)$$

dimana $\operatorname{erfc}(x)$ adalah complementary error function (Abramowitz and Stegun dalam Bear and Verruijt, 1987). Setelah waktu cukup lama dan larutan bergerak cukup jauh, distribusi konsentrasi dapat didekati dengan bagian pertama dari persamaan (2) :

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x - v.t}{\sqrt{4D_{sh}.t}} \right\} \quad (3)$$

Metode **inverse problem** untuk menghitung koefisien dispersi hydrodynamik dilakukan sebagai berikut :

Persamaan 1 disusun menjadi :

$$D_{sh} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \theta \frac{\partial c}{\partial t} + v \theta \frac{\partial c}{\partial x} \quad (4)$$

proses integrasi tahap satu mendapatkan :

$$D_{sh} = \frac{\int_0^x \theta \frac{\partial c}{\partial t} . dx + \int_0^x \theta . v \frac{\partial c}{\partial x} . dx}{\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_x} \quad (5)$$

dengan transformasi numerik persamaan (5) dapat ditulis sebagai berikut

$$D_{sh} = \frac{\theta \cdot \sum_{x=0}^n \frac{\partial c}{\partial t} \cdot \Delta x + v \cdot \theta \cdot \sum_{x=0}^n \frac{\partial c}{\partial x} \cdot \Delta x}{\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_x} \quad (6)$$

dimana : Δx adalah panjang satu ruas kolom (cm) dan n adalah jumlah ruas pada kolom. Selanjutnya tahapan untuk menghitung D_{sh} selengkapnya adalah sebagai berikut :

1. Mendapatkan sebaran konsentrasi larutan untuk memperoleh 1) hubungan antara konsentrasi terhadap waktu pada berbagai jarak , $C = f(t) \Big|_x$ dan 2) hubungan antara konsentrasi terhadap jarak pada berbagai waktu $C = f(x) \Big|_t$.
2. Menentukan persamaan empiris hubungan antara $c = f(t)$ dan $c = f(x)$. Membuat turunan pertama dari fungsi $c = f(t)$ dan $c = f(x)$.
3. Mengevaluasi masing-masing persamaan pada waktu dan jarak yang dipilih, dan menghitung D_{sh} menggunakan persamaan (6).
4. Memilih D_{sh} serta menghitung simpangan baku.

Untuk menguji metode inverse problem dalam perhitungan D_{sh} , digunakan data hasil penelitian dari Gaudet, et al. (1977). Penelitian tersebut dilakukan dengan menggunakan tanah pasir dalam silinder vertikal berukuran diameter dalam 6 cm, panjang 94 cm. Pengukuran konsentrasi dilakukan secara kontinyu pada jarak 7, 22, 37, 67, dan 82 cm. Fluks larutan ditentukan sebesar 10.8 cm/jam, dengan kadar air volumetrik sebesar 0.257 cm³/cm³.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Data pengukuran konsentarsi relatif sebagai fungsi waktu pada beberapa titik pengukuran diplotkan dengan persamaan empiris dimana parameter di dalamnya dioptimasi menggunakan algoritma Marquardt (Setiawan dan Sho Shiozawa, 1992). Persamaan empiris untuk menggambarkan hubungan antara konsentrasi dan awktu berbentuk :

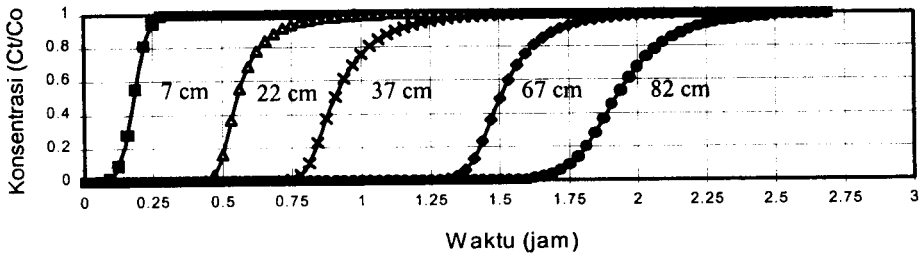
$$C_t / C_o = 1 - \frac{1}{\{1 + (at)^b\}^c} \quad (7)$$

disajikan pada Tabel 1 dan kurvanya disajikan pada Gambar 2.

Nilai parameter a, b, dan c untuk masing-masing titik pengukuran

Tabel 1. Parameter a, b, dan c hasil optimasi pada setiap titik pengukuran

Parameter	x=7 cm	x=22 cm	x=37 cm	x=67 cm	x=82 cm
a	3,862	2.001	1.215	0.699	0.542
b	5.289	26.680	30.233	40.168	28.439
c	4.854	0.253	0.246	0.317	0.474



Gambar 2. Hubungan antara konsentrasi relatif dengan waktu pengukuran

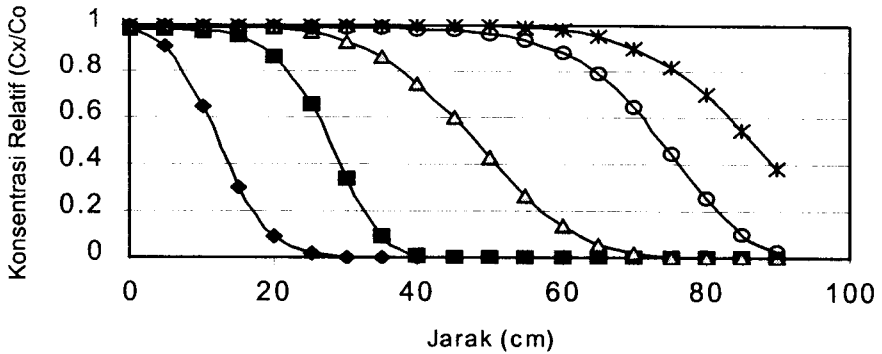
Selanjutnya, hubungan antara konsentrasi relatif sebagai fungsi dari jarak pengukuran pada berbagai waktu, yakni 0.219 jam; 0.462 jam; 1.105 jam; 1.675 jam dan 2.200 jam, dapat dipresentasikan oleh persamaan sebagai berikut :

$$C_x / C_o = d + \frac{e}{\left\{1 + \left(\frac{x}{f}\right)^g\right\}^h} \quad \dots (8)$$

Nilai parameter d, e, f, g, dan h dapat dilihat pada Tabel 2 dan kurvanya disajikan pada Gambar 3.

Tabel 2. Parameter a, b, c, d, dan e hasil pengepasan

Parameter	t = 0.22 jam	t = 0.46 jam	t = 1.105 jam	t = 1.675 jam	t = 2.20 jam
d	9.999-06	9.999-06	9.999-06	9.999-06	9.999-06
e	9.840-01	9.880-01	9.830-01	9.970-01	1.005-00
f	2.915+01	6.442+01	8.189+01	9.187+01	6.544+01
g	1.981+00	2.037+00	2.964+00	4.227+00	5.476+00
h	3.434+01	2.788+01	2.478+01	2.174+01	2.288+00



Gambar 3. Hubungan antara konsentrasi relatif dengan jarak pengukuran

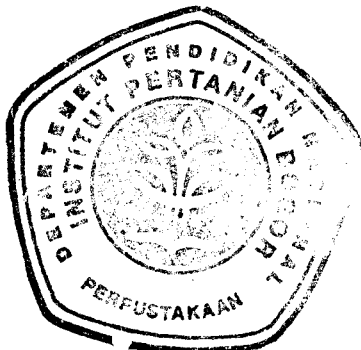
Dengan metode ini diperoleh hasil $D_{sh} = 6.79 \text{ cm}^2/\text{jam}$, dengan simpangan baku = $\pm 2.798 \text{ cm}^2/\text{jam}$. Sementara itu dengan metode Gaudet, *et al.* (1977) diperoleh $D_{sh} = 7 \text{ cm}^2/\text{jam}$. Nilai D_{sh} hasil metode inverse problem digunakan untuk menghitung

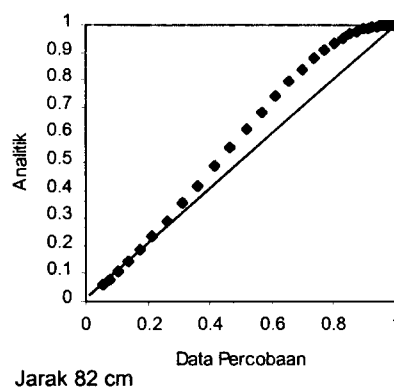
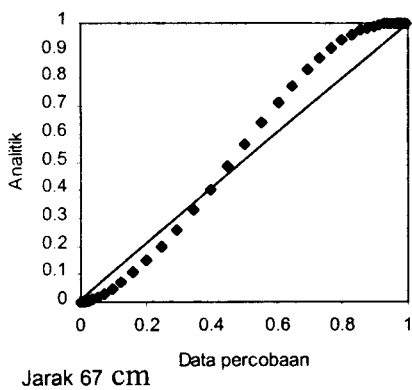
distribusi larutan menggunakan persamaan 2. Hasil komparasi dengan data pengukuran dapat dilihat pada Gambar4, sedangkan untuk semua data pengukuran disajikan sebagai persamaan regresi dan koefisien regresi disajikan pada table 3.

Tabel 3. Verifikasi model dengan regresi sederhana

No	Titik pengukuran	Persamaan regresi ^{*)}	Koefisien determinasi
1	Titik pertama (7 cm)	$Y = 1.1723 x + 0.0012$	0.97
2	Titik ke dua (22 cm)	$Y = 1.0971 x + 0.0241$	0.94
3	Titik ke tiga (37 cm)	$Y = 1.0361 x + 0.0161$	0.98
4	Titik keempat (67 cm)	$Y = 1.0388 x - 0.0053$	0.99
5	Titik kelima (82 cm)	$Y = 0.9449 x + 0.0727$	0.97

^{*)} Y : hasil perhitungan analitik, x : data pengukuran





Gambar 4. Perbandingan konsentrasi larutan pada jarak 62 cm dan 82 cm

Dari Tabel 3 dan Gambar 4 terlihat bahwa antara data percobaan dengan hasil perhitungan analitik menggunakan koefisien D_{sh} hasil metode inverse problem memberikan hasil koefisien determinasi antara 0.94 – 0.98. Slope regresi mendekati satu dan intersep mendekati nol.

KESIMPULAN

Metode inverse problem yang dikembangkan untuk menghitung koefisien dispersi hydrodynamic memberikan hasil yang memuaskan. Ketelitiannya dalam menghitung D_{sh} dengan menggunakan data Gaudet et al. (1977) dinyatakan dengan koefisien determinasi berkisar antara 0.94 – 0.98.

DAFTAR PUSTAKA

- Appelo, C.A.J. and D. Postma. 1993. *Geochemistry, groundwater and pollution*. A.A Publisher, Old Post Road, Brookfield, VT 05036, USA.
- Bear, J. and A. Verrujit. 1987. *Modeling Groundwater Flow and Pollution*. D. Reidel Tokyo, 414 p.
- Feyen, J., D. Jacques. A. Thimmerman, and J. Vanderborcht. 1998. *Modeling Water Flow and Solute Transport in heterogeneous Soils, A review of Recent Approaches*. *J. agric. Engng Res.* 70: 231-256.
- Gaudet, J. P., H. Jegat, G.Vachaud, and P. J. Wierenga. 1977. *Solute Transfer, with Exchange between Mobile and Stagnant Water, through Unsaturated Sand*. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 41(4): 665-671.
- Hillel, D.1980. *Fundamental of Soil Physics*. Academic Press, New York, USA.
- Noborio, K., K. J. McInnes, and J. L. Heilman, 1996. *Two-Dimensional Model for water, Heat, and Solute Transport in Furrow-Irrigated Soil : I. Theory*. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 60 : 1000-1009.
- Setiawan B.I. dan Sho Shiosawa, 1992. *On The Determination of Unsaturated Hydraulic Conductivity From soil Moisture Profiles and From Water Retention Curves*. *Soil Science.* 156(6): 389-395.
- Yamaguchi, T., P. Moldrup, and S. Yokosi. 1989. *Using Breakthrough Curves for Parameter estimation in the Convection-Dispersion Model of Solute Transport*. *Soil Sci. Soc. J.* 53: 1635-1641.