

# BILANGAN KETERHUBUNGAN PELANGI PADA *SEQUENTIAL JOIN* DARI EMPAT DAN LIMA GRAF

\*F. Septyanto<sup>1</sup>

<sup>1</sup>) Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,  
Institut Pertanian Bogor, Jl. Meranti, Kampus IPB Dramaga Bogor  
[fendy-se@apps.ipb.ac.id](mailto:fendy-se@apps.ipb.ac.id). \*corresponding author

## Abstrak

Pewarnaan pelangi pada suatu graf adalah pelabelan busur sehingga setiap pasang simpul dapat dihubungkan oleh lintasan pelangi (lintasan yang warna busurnya berbeda semua). Bilangan keterhubungan pelangi dari suatu graf adalah banyaknya warna minimal pada pewarnaan pelangi pada graf tersebut. *Sequential join* dari beberapa graf saling lepas diperoleh dengan menghubungkan setiap simpul pada graf pertama ke setiap simpul pada graf kedua, lalu setiap simpul pada graf kedua ke setiap simpul pada graf ketiga, dan seterusnya. Penelitian ini menyelidiki bilangan keterhubungan pelangi pada *sequential join* dari empat atau lima graf.

**Kata kunci:** bilangan keterhubungan pelangi, graf terhubung, *sequential join*

## 1 Pendahuluan

Graf adalah suatu konsep matematika yang sering digunakan untuk memodelkan berbagai macam jaringan, baik itu jaringan pertemanan, komunikasi, transportasi, dan sebagainya. Suatu graf  $G$  terdiri atas dua data, yaitu himpunan simpul  $V(G)$  dan himpunan busur  $E(G)$ . Setiap busur adalah pasangan simpul  $xy$ , dengan  $x, y \in V(G)$  dan  $x \neq y$ . Jika terdapat busur  $xy$ , dikatakan bahwa simpul  $x$  bertetangga dengan simpul  $y$ . Banyaknya tetangga dari suatu simpul disebut sebagai derajat dari simpul tersebut. Penelitian ini berfokus pada graf tak berarah, yakni busur  $xy$  dianggap sama dengan busur  $yx$ . Definisi-definisi dan notasi yang digunakan dalam artikel ini mengikuti [1].

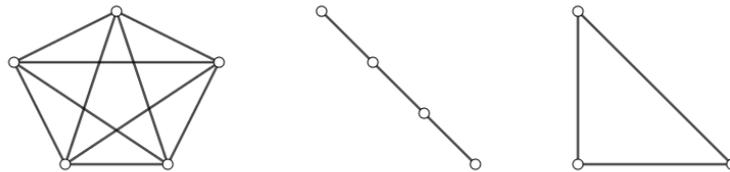
Selain simpul dan busur, suatu graf juga dapat dilengkapi dengan berbagai data tambahan. Data tambahan tersebut biasanya disajikan sebagai pelabelan simpul, pelabelan busur, ataupun keduanya. Sebagai ilustrasi, suatu graf yang memodelkan jaringan transportasi dapat dilengkapi dengan label busur berupa jarak atau lebih umumnya biaya transportasi untuk melintasi busur tersebut. Pelabelan tersebut dapat digunakan misalnya untuk menentukan rute yang paling efisien (*shortest path problem*, *traveling salesman problem*) [1]. Contoh lainnya, suatu graf yang memodelkan jaringan pertemanan dapat dilengkapi dengan label busur berupa tingkat pertemanan (teman dekat atau biasa saja, dikuantifikasi). Pelabelan tersebut dapat digunakan misalnya untuk melakukan *clustering* pertemanan pada pengguna media sosial [5]. Selain pelabelan busur, pelabelan simpul juga sering digunakan, misalnya pada proses penjadwalan. Lebih lengkapnya, pembaca dirujuk pada artikel survey dinamis mengenai berbagai macam pelabelan, ditulis oleh Gallian [4].

Salah satu konsep penting dalam teori graf adalah keterhubungan. *Jalan* (*walk*) pada suatu graf adalah barisan simpul  $v_1 v_2 \cdots v_n$  sehingga  $v_i$  dan  $v_{i+1}$  bertetangga untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Dikatakan bahwa jalan tersebut memiliki *panjang*  $n-1$ , dan menghubungkan ujung-ujungnya yaitu  $v_1$  dan  $v_n$ . Suatu graf  $G$  disebut *graf terhubung* apabila untuk setiap dua simpul berbeda  $x, y \in V(G)$  selalu terdapat jalan yang menghubungkan  $x$  dan  $y$ . Tentu saja, tidak semua graf adalah graf terhubung. Namun, setiap graf adalah gabungan saling lepas dari beberapa graf terhubung (disebut komponen-komponen terhubung dari graf tersebut). Konsep graf terhubung sangat penting dalam berbagai penerapan graf, misalnya pada suatu jaringan komunikasi diperlukan graf yang terhubung sehingga setiap pihak selalu dapat berkomunikasi dengan pihak lainnya. Selain itu, konsep graf terhubung juga penting dalam meneliti sifat-sifat teoretis graf, misalnya untuk menyelidiki keplanaran suatu graf dapat diasumsikan bahwa grafnya terhubung, sebab suatu graf adalah planar jika dan hanya jika setiap komponennya planar [1].

Konsep jalan juga dapat digunakan untuk mendefinisikan sebuah metrik (jarak) pada graf. Didefinisikan *jarak* antara dua simpul  $x, y$  pada graf  $G$ , dituliskan  $d(x, y)$  atau  $d_G(x, y)$ , sebagai panjang dari jalan terpendek dari  $x$  ke  $y$ . *Diameter* graf  $G$ , dituliskan  $diam(G)$ , adalah jarak maksimum antara sepasang simpul di  $G$ . Dengan kata lain,

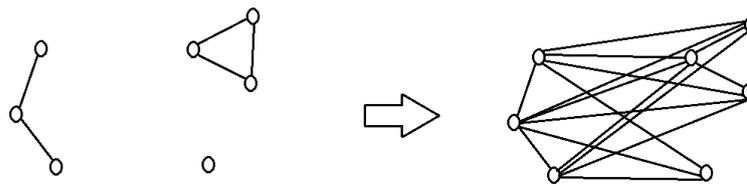
$$diam(G) = \max\{d(x, y) | x, y \in V(G)\}. \quad (1)$$

Di teori graf, terdapat bermacam-macam konstruksi graf, yang masing-masingnya cocok diterapkan pada situasi tertentu. Misalnya *graf lengkap*  $K_n$  terdiri dari  $n$  simpul yang setiap pasang simpulnya saling bertetangga. Graf lengkap  $K_n$  merepresentasikan graf yang paling “penuh”, karena memiliki jumlah busur maksimal di antara semua graf dengan  $n$  simpul. *Graf lintasan*  $P_n$  terdiri dari  $n$  simpul dengan  $V(P_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$  dan  $E(P_n) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n\}$ . *Graf lingkaran*  $C_n$  didapat dari graf lintasan  $P_n$  dengan menambahkan satu busur antara ujung-ujung lintasan  $P_n$  tersebut.



Gambar 1. Dari kiri ke kanan:  $K_5$ ,  $P_4$ , dan  $C_3$  (atau  $K_3$ )

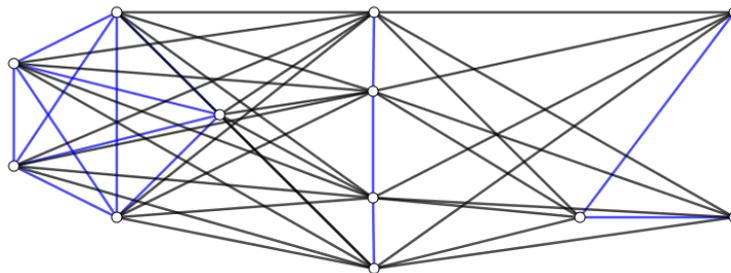
Terdapat juga konstruksi graf baru dari graf-graf yang sudah ada. Misalnya, gabungan dari beberapa graf  $G_1, \dots, G_n$  yang himpunan-himpunan simpulnya saling lepas (tidak beririsan) dinotasikan sebagai  $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$ . Sebagai contoh, ketiga graf pada Gambar 1 dapat digabung menjadi  $K_5 \cup P_4 \cup C_3$  tanpa menambahkan simpul atau busur baru. Salah satu konstruksi lain yang sering dipelajari adalah *join*. *Join* dari dua graf  $G_1, G_2$  adalah graf baru yang disimbolkan sebagai  $G_1 + G_2$  dan diperoleh dengan menghubungkan setiap simpul  $G_1$  dengan busur baru ke setiap simpul  $G_2$ . Konstruksi ini memperumum graf bipartit lengkap, yang diperoleh dengan  $E(G_1) = E(G_2) = \emptyset$ .



Gambar 2. *Join* dari  $P_3$  dan  $K_3 \cup K_1$  (kiri) menghasilkan  $P_3 + (K_3 \cup K_1)$  (kanan).

Konstruksi *join* dapat diperumum ke lebih dari dua graf. *Sequential join* dari graf-graf  $G_1, G_2, \dots, G_n$  yang saling lepas adalah graf baru, disimbolkan  $G_1 + G_2 + \dots + G_n$ , yang diperoleh dengan menghubungkan setiap simpul  $G_i$  dengan busur baru ke setiap simpul  $G_{i+1}$  untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Alternatifnya, *sequential join* adalah gabungan dari beberapa graf *join* sebagai berikut

$$G_1 + G_2 + \dots + G_n = (G_1 + G_2) \cup (G_2 + G_3) \cup \dots \cup (G_{n-1} + G_n). \quad (2)$$



Gambar 3. *Sequential join*  $K_5 + P_4 + C_3$ .

Sebagai catatan, untuk sembarang graf  $G_1, G_2, \dots, G_n$  (baik itu graf-graf terhubung atau bukan), hasil dari *sequential join*-nya  $G_1 + G_2 + \dots + G_n$  selalu terhubung. Terlebih lagi, diameternya pasti  $n-1$ , karena jarak terjauh adalah dari sembarang simpul di  $G_1$  ke sembarang simpul di  $G_n$ .

Pewarnaan pelangi, diperkenalkan oleh Chartrand dkk [3], adalah sebuah konsep yang memadukan konsep graf terhubung dengan pelabelan busur. *Pelabelan busur* pada suatu graf adalah sebuah pemetaan dari himpunan busur graf tersebut ke  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Diberikan sebuah pelabelan busur, *lintasan pelangi* (*rainbow path*) adalah lintasan yang label busurnya berbeda semua. Pelabelan busur tersebut dinamakan *pewarnaan pelangi* (*rainbow coloring*) apabila setiap pasang simpul dapat dihubungkan oleh lintasan pelangi. Pada pewarnaan pelangi, setiap label busur disebut *warna*.

Cara yang paling sederhana untuk menghasilkan pewarnaan pelangi adalah dengan memberikan setiap busur satu warna yang berbeda, sehingga banyaknya warna adalah sama dengan banyaknya busur. Namun, seringkali ada pewarnaan pelangi yang lebih efisien, dalam artian menggunakan jumlah warna yang lebih sedikit. *Bilangan keterhubungan pelangi* (*rainbow connection number*) dari suatu graf  $G$  adalah nilai  $k$  terkecil sehingga graf tersebut memiliki pewarnaan pelangi dengan  $k$  warna, dituliskan  $k = rc(G)$ . Pada prinsipnya, untuk menunjukkan  $rc(G) = k$  perlu dilakukan dua hal:

- 1) membuktikan  $rc(G) \leq k$  dengan mengonstruksi suatu pewarnaan pelangi di  $G$  yang menggunakan  $k$  warna,

- 2) membuktikan  $rc(G) \geq k$  dengan memberikan alasan mengapa tidak mungkin ada pewarnaan pelangi di  $G$  dengan  $k - 1$  warna atau kurang.

Jika  $G$  memiliki pewarnaan pelangi, maka  $G$  pasti merupakan graf terhubung. Jika  $G$  tidak terhubung, maka  $G$  tidak memiliki pewarnaan pelangi sehingga nilai  $rc(G)$  tak terdefinisi. Jadi,  $rc(G)$  terdefinisi jika dan hanya jika  $G$  terhubung.

Konsep pewarnaan pelangi dapat diaplikasikan pada desain jaringan komunikasi yang aman antara agensi-agensi pemerintahan [3]. Warna busur mewakili *password* atau *firewall* pada sebuah *link*. Diharapkan setiap agensi dapat mengakses informasi dari agensi yang lain, walaupun melalui perantara, yakni grafnya terhubung. Namun, demi keamanan, lintasan tersebut tidak boleh mengulang *password*, sehingga lintasan tersebut adalah lintasan pelangi. Agar tetap praktis, diharapkan bahwa banyaknya *firewall* (warna) sesedikit mungkin. Banyaknya warna minimal adalah bilangan keterhubungan pelangi dari graf yang memodelkan jaringan tersebut.

Konsep pewarnaan pelangi juga sering diteliti dari sudut pandang ilmu komputer. Terdapat banyak problem mengenai bilangan keterhubungan pelangi yang tergolong sulit untuk diselesaikan secara komputasional. Menentukan apakah  $rc(G) = 2$  adalah problem yang *NP-complete*, dan menentukan  $rc(G)$  adalah problem yang *NP-hard* sebagaimana ditunjukkan oleh Chakraborty dkk [2].

Chartrand dkk [3] menentukan bilangan keterhubungan pelangi dari beberapa kelas graf spesifik. Di antaranya  $rc(K_n) = 1$  untuk graf lengkap,  $rc(P_n) = n - 1$  untuk graf lintasan, dan  $rc(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  untuk graf lingkaran. Chartrand dkk juga menentukan bilangan keterhubungan pelangi dari graf roda, graf bipartit lengkap, graf multipartit lengkap, dan graf pohon secara umum. Berbagai kelas graf lainnya juga sudah dipelajari oleh banyak peneliti.

Terdapat batasan-batasan (ketaksamaan) yang mengaitkan bilangan keterhubungan pelangi dengan parameter lain. Misalnya, Chartrand dkk [3] mengamati bahwa

$$diam(G) \leq rc(G) \leq |E(G)|. \quad (3)$$

Batas atas  $rc(G) \leq |E(G)|$  diperoleh dari fakta bahwa pewarnaan trivial (yang memberikan warna berbeda ke setiap busur) adalah pewarnaan pelangi, sedangkan  $rc(G)$  didefinisikan sebagai banyak warna minimal pada suatu pewarnaan pelangi di  $G$ . Batas bawah  $rc(G) \geq diam(G)$  diperoleh dari pengamatan bahwa jika grafnya diberikan pewarnaan pelangi, dan  $x, y \in V(G)$  dengan jarak  $d(x, y) = diam(G)$ , maka sembarang lintasan pelangi antara  $x$  dan  $y$  pasti memiliki panjang tidak kurang dari  $diam(G)$ , jadi terdapat sedikitnya  $diam(G)$  warna berbeda. Chartrand dkk [3] menunjukkan bahwa batas atas  $rc(G) \leq |E(G)|$  menjadi kesamaan jika dan hanya jika  $G$  adalah graf pohon. Belum diketahui secara pasti kapan saja batas bawah  $rc(G) \geq diam(G)$  menjadi kesamaan. Ada cukup banyak jenis graf dengan bilangan keterhubungan pelanginya tepat sama dengan diameternya, contohnya graf lingkaran genap dan graf lintasan [1]. Tapi ada banyak juga graf yang memenuhi  $rc(G) > diam(G)$ , contohnya graf lingkaran ganjil, graf lengkap, dan graf pohon (yang bukan graf lintasan) [1].

Selain diameter, batas bawah lain untuk  $rc(G)$  yang juga sering digunakan adalah banyaknya simpul daun, yaitu simpul berderajat 1. Schiermeyer [8] mengamati bahwa jika  $n_1(G)$  adalah banyaknya simpul berderajat 1 pada graf  $G$ , maka

$$rc(G) \geq n_1(G). \quad (4)$$

Alasannya, setiap lintasan pelangi yang menghubungkan dua simpul berderajat 1 pasti menggunakan satu-satunya busur dari/ke simpul-simpul berderajat 1 tersebut. Untuk hasil lebih lanjut, pembaca dirujuk kepada artikel survei [7] dan buku [6] oleh Li dan Sun yang merangkum hasil-hasil teoretis maupun algoritmik tentang bilangan keterhubungan pelangi dan varian-variannya.

Perhatikan bahwa *join* dari sembarang dua graf (terhubung atau tidak) selalu menghasilkan graf terhubung sehingga bilangan keterhubungan pelanginya terdefinisi. Bilangan keterhubungan pelangi dari *join* dua graf telah diteliti oleh Chartrand dkk [3] pada kasus khusus graf bipartit lengkap, serta oleh Septyanto dan Sugeng [9] untuk graf *join* secara umum.

Demikian pula, *sequential join* dari sembarang  $n \geq 2$  buah graf selalu menghasilkan graf terhubung sehingga bilangan keterhubungan pelanginya terdefinisi. Perhatikan bahwa *sequential join* dari tiga buah graf dapat dipandang sebagai *sequential join* dari dua buah graf saja, karena  $G_1 + G_2 + G_3 = (G_1 \cup G_3) + G_2$ . Jadi, langkah selanjutnya adalah mempelajari *sequential join* dari empat buah graf. Studi awal telah dilakukan oleh Septyanto dan Sugeng [10] pada *sequential join* dari empat buah graf,  $mK_1 + bK_1 + bK_1 + mK_1$  dengan  $m \geq 1$  dan  $b \geq 2$ . Notasi  $nK_1$  berarti graf yang terdiri dari  $n$  simpul dan tanpa busur.

Dalam penelitian kali ini, penulis menyelidiki *sequential join*  $G_1 + G_2 + \dots + G_n$  ketika  $n = 4$  dan  $n = 5$  dengan asumsi bahwa  $G_2$  dan  $G_{n-1}$  masing-masingnya memiliki lebih dari satu simpul. Asumsi tersebut diperlukan karena jika  $G_2 = K_1$  maka setiap simpul yang berderajat 0 di  $G_1$  akan menjadi simpul berderajat 1 di  $G_1 + G_2 + \dots + G_n$ . Akibatnya, jika  $G_1$  memiliki banyak simpul berderajat 0 maka nilai  $n_1(G_1 + \dots + G_n)$  akan menjadi batas bawah yang cukup besar untuk  $rc(G_1 + G_2 + \dots + G_n)$  berdasarkan (4), sehingga nilai  $rc(G_1 + G_2 + \dots + G_n)$  tidak dapat dibatasi dari bawah secara umum. Demikian pula jika  $G_{n-1} = K_1$ . Dengan demikian, agar bilangan keterhubungan pelangi dari  $G_1 + G_2 + \dots + G_{n-1} + G_n$  lebih terkontrol, perlu ada asumsi  $G_2, G_{n-1} \neq K_1$ .

## 2 Hasil dan Pembahasan

Sebagaimana disebutkan pada bagian Pendahuluan, penelitian ini berfokus pada bilangan keterhubungan pelangi dari  $G_1 + G_2 + \dots + G_n$  ketika  $n = 4$  dan  $n = 5$ . Berikut ini hasil penelitian untuk  $n = 4$ . Tidak diperoleh hasil eksak, namun didapat batasan yang cukup ketat.

**Teorema 1.** Misalkan  $G_1, G_2, G_3, G_4$  adalah sembarang graf, dengan  $G_2$  dan  $G_3$  masing-masing memiliki lebih dari satu simpul. Maka

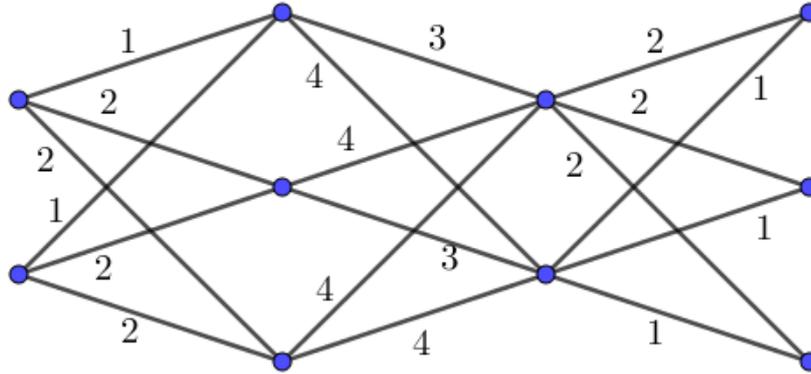
$$3 \leq rc(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \leq 4 \quad (5)$$

dan batas-batas ini optimal.

**Bukti.** Terdapat dua hal yang perlu dibuktikan, yaitu batas bawah dan batas atas. Batas bawah didapat dari (3),  $rc(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \geq diam(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) = 3$ . Selanjutnya akan dibuktikan batas atasnya dengan mengonstruksi sebuah pewarnaan

pelangi dengan 4 warna. Untuk setiap  $i \in \{1,2,3,4\}$ , misalkan  $G_i$  memiliki  $n_i$  buah simpul  $v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n_i}$ . Busur internal di setiap  $G_i$  diwarnai secara sembarang. Busur yang menyeberang diwarnai sesuai aturan berikut:

- Busur  $v_{1,a}v_{2,b}$  diwarnai 1 jika  $b = 1$ , dan diwarnai 2 pada kasus lainnya.
- Busur  $v_{2,a}v_{3,b}$  diwarnai 3 jika  $(a,b) = (1,1)$  atau  $a = 2, b \geq 2$ , dan diwarnai 4 pada kasus lainnya.
- Busur  $v_{3,a}v_{4,b}$  diwarnai 2 jika  $a = 1$ , dan diwarnai 1 pada kasus lainnya.



Gambar 4. Ilustrasi pewarnaan pada  $2K_1 + 3K_1 + 2K_1 + 3K_1$ .

Berikut ini dibuktikan bahwa pewarnaan tersebut adalah pewarnaan pelangi. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap pasang simpul  $x, y$  selalu terdapat lintasan pelangi yang menghubungkan keduanya. Jika  $x, y$  bertetangga, maka busur antara keduanya adalah lintasan pelangi. Selanjutnya diasumsikan bahwa  $x, y$  tidak bertetangga. Misal  $x = v_{i,a}$  dan  $y = v_{j,b}$ . Tanpa mengurangi keumuman, dapat dianggap  $i \leq j$ . Tabel 1 menunjukkan bahwa selalu ada lintasan pelangi dari  $x$  ke  $y$  pada semua kasus yang dapat terjadi, sehingga terbukti bahwa pelabelan yang dideskripsikan di atas adalah pewarnaan pelangi.

Tabel 1. Lintasan pelangi dari  $x = v_{i,a}$  ke  $y = v_{j,b}$ .

$(i, j)$	Syarat	Lintasan	Warna Busur
(1,1)		$v_{1,a} - v_{2,1} - v_{3,1} - v_{2,2} - v_{1,b}$	1, 3, 4, 2
(2,2)	$a = 1$	$v_{2,1} - v_{1,1} - v_{2,b}$	1, 2
	$a \geq 2$	$v_{2,a} - v_{1,1} - v_{2,1} - v_{3,1} - v_{2,b}$	2, 1, 3, 4
(3,3)	$a = 1$	$v_{3,1} - v_{4,1} - v_{3,b}$	2, 1
	$a \geq 2$	$v_{3,a} - v_{4,1} - v_{3,1} - v_{2,1} - v_{3,b}$	1, 2, 3, 4
(4,4)		$v_{4,a} - v_{3,1} - v_{2,1} - v_{3,2} - v_{4,b}$	2, 3, 4, 1
(1,3)		$v_{1,a} - v_{2,1} - v_{3,b}$	1, 3 atau 1, 4
(1,4)		$v_{1,a} - v_{2,1} - v_{3,1} - v_{4,b}$	1, 3, 2
(2,4)		$v_{2,a} - v_{3,1} - v_{4,b}$	3, 2 atau 4, 2

Dengan ini, batas atas (5) terbukti.

Batasan-batasan (5) tidak dapat diperketat lagi secara umum, karena dapat terjadi kesamaan di batas bawah maupun batas atasnya. Berikut ini contoh yang menunjukkan dua kemungkinan tersebut, dikutip dari [10],

$$rc(mK_1 + bK_1 + bK_1 + mK_1) = \begin{cases} 3, & \text{jika } 1 \leq m \leq 5 \text{ dan } b \geq 2 \\ 4, & \text{jika } m \geq 6 \text{ dan } b \geq 2. \end{cases} \quad (6)$$

Bukti Teorema 1 selesai. ■

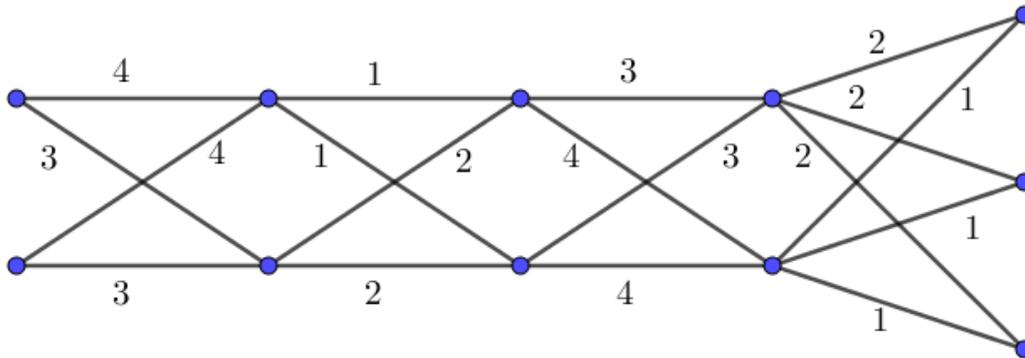
Selanjutnya hasil penelitian untuk *sequential join* dari  $n = 5$  buah graf.

**Teorema 2.** Misalkan  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5$  adalah sembarang graf, dengan  $G_2$  dan  $G_4$  masing-masing memiliki lebih dari satu simpul. Maka

$$rc(G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5) = 4 \quad (6)$$

**Bukti.** Dari (3), diperoleh batas bawah  $rc(G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5) \geq diam(G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5) = 4$ . Selanjutnya akan dibuktikan batas atasnya dengan mengkonstruksi sebuah pewarnaan pelangi dengan 4 warna. Untuk setiap  $i \in \{1,2,3,4\}$ , misalkan  $G_i$  memiliki  $n_i$  buah simpul  $v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n_i}$ . Busur internal di setiap  $G_i$  diwarnai secara sembarang. Busur yang menyeberang diwarnai sesuai aturan berikut:

- Busur  $v_{1,a}v_{2,b}$  diwarnai 4 jika  $b = 1$ , dan diwarnai 3 pada kasus lainnya.
- Busur  $v_{2,a}v_{3,b}$  diwarnai 1 jika  $a = 1$ , dan diwarnai 2 pada kasus lainnya.
- Busur  $v_{3,a}v_{4,b}$  diwarnai 3 jika  $b = 1$ , dan diwarnai 4 pada kasus lainnya.
- Busur  $v_{4,a}v_{5,b}$  diwarnai 2 jika  $a = 1$ , dan diwarnai 1 pada kasus lainnya.



Gambar 5. Ilustrasi pewarnaan pada  $2K_1 + 2K_1 + 2K_1 + 2K_1 + 3K_1$ .

Berikut ini dibuktikan bahwa pewarnaan tersebut adalah pewarnaan pelangi. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap pasang simpul  $x, y$  selalu terdapat lintasan pelangi yang menghubungkan keduanya. Jika  $x, y$  bertetangga, maka busur antara keduanya adalah lintasan pelangi. Selanjutnya diasumsikan bahwa  $x, y$  tidak bertetangga. Misal  $x = v_{i,a}$  dan  $y = v_{j,b}$ . Tanpa mengurangi keumuman, dapat dianggap  $i \leq j$ . Tabel 2 menunjukkan lintasan pelangi dari  $x$  ke  $y$  pada semua kasus yang dapat terjadi, sehingga terbukti bahwa pelabelan yang dideskripsikan di atas adalah pewarnaan pelangi.

Tabel 2. Lintasan pelangi dari  $x = v_{i,a}$  ke  $y = v_{j,b}$ .

$(i, j)$	Syarat	Lintasan	Warna Busur
(1,1)		$v_{1,a} - v_{2,1} - v_{3,1} - v_{2,2} - v_{1,b}$	4, 1, 2, 3
(2,2)	$a = 1$	$v_{2,1} - v_{3,1} - v_{2,b}$	1, 2
	$a \geq 2$	$v_{2,a} - v_{1,1} - v_{2,1} - v_{3,1} - v_{2,b}$	4, 3, 1, 2
(3,3)		$v_{3,a} - v_{4,1} - v_{5,1} - v_{4,2} - v_{3,b}$	3, 2, 1, 4
(4,4)	$a = 1$	$v_{4,1} - v_{5,1} - v_{4,b}$	2, 1
	$a \geq 2$	$v_{4,a} - v_{3,1} - v_{4,1} - v_{5,1} - v_{4,b}$	4, 3, 2, 1
(5,5)		$v_{5,a} - v_{4,1} - v_{3,1} - v_{4,2} - v_{5,b}$	2, 3, 4, 1
(1,3)		$v_{1,a} - v_{2,1} - v_{3,b}$	4, 1
(1,4)	$b = 1$	$v_{1,a} - v_{2,1} - v_{3,1} - v_{4,1}$	4, 1, 3
	$b \geq 2$	$v_{1,a} - v_{2,2} - v_{3,1} - v_{4,b}$	3, 2, 4
(1,5)		$v_{1,a} - v_{2,1} - v_{3,1} - v_{4,1} - v_{5,b}$	4, 1, 3, 2
(2,4)		$v_{2,a} - v_{3,1} - v_{4,b}$	1, 3 / 1, 4 / 2, 3 / 2, 4
(2,5)	$a = 1$	$v_{2,1} - v_{3,1} - v_{4,1} - v_{5,b}$	1, 3, 2
	$a \geq 2$	$v_{2,a} - v_{3,1} - v_{4,2} - v_{5,b}$	2, 4, 1
(3,5)		$v_{3,a} - v_{4,1} - v_{5,b}$	3, 2

Dengan ini, Teorema 2 terbukti. ■

### 3 Simpulan dan Saran

Penelitian ini memperluas wawasan tentang bilangan keterhubungan pelangi dari konstruksi *join* dua graf menjadi konstruksi yang lebih umum yaitu *sequential join* dari empat atau lima graf. Ditemukan bahwa bilangan keterhubungan pelangi pada *sequential join*  $G_1 + G_2 + G_3 + G_4$  bernilai 3 atau 4, terlepas dari struktur graf  $G_1, G_2, G_3, G_4$  asalkan  $G_2, G_3 \neq K_1$ . Untuk *sequential join*  $G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5$  bilangan keterhubungannya sama dengan diameternya yaitu 4, terlepas dari struktur graf  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5$  asalkan  $G_2, G_4 \neq K_1$ .

Hasil-hasil seperti ini cukup langka. Biasanya, bilangan keterhubungan pelangi dari suatu konstruksi graf akan bergantung pada struktur masing-masing graf penyusunnya.

Untuk penelitian selanjutnya, dapat diselidiki bilangan keterhubungan pelangi pada *sequential join* dari  $n$  graf, dengan  $n \geq 6$ . Berdasarkan hasil untuk  $n = 5$  yang sudah ditemukan, diduga bahwa bilangan keterhubungan pelanginya sama dengan diameternya, yaitu  $n - 1$ . Namun, belum diketahui apakah konstruksi pewarnaan pelangi yang dideskripsikan dalam artikel ini dapat diperumum atau tidak.

### Daftar Pustaka

- [1] Bondy A, Murty USR. 2008. *Graph Theory*. Springer. London.
- [2] Chakraborty S, Fischer E, Matsliah A, Yuster R. 2011, Hardness and algorithms for rainbow connectivity. *Journal of Combinatorial Optimization*. 21:330-347.
- [3] Chartrand G, Johns GL, McKeon KA, Zhang P. 2008. Rainbow connection in graphs. *Mathematica Bohemica*. 133(1):85-98.
- [4] Gallian JA. 2019. A dynamic survey of graph labelling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 17. DOI: <https://doi.org/10.37236/27>.

- [5] Jones S, O'Neill E. 2010. Feasibility of structural network clustering for group-based privacy control in social networks. *Proceedings of the Sixth Symposium on Usable Privacy and Security, SOUPS '10*. Artikel 9:1-13. DOI: <https://doi.org/10.1145/1837110.1837122>
- [6] Li X, Sun Y. 2012. *Rainbow Connection of Graphs*. Springer. New York.
- [7] Li X, Sun Y. 2017. An updated survey on rainbow connection of graphs – a dynamic survey. *Theory and Applications of Graphs*, 0(1), Artikel 3. DOI: <https://doi.org/10.20429/tag.2017.000103>.
- [8] Schiermeyer I. 2011. Bounds for rainbow connection number of graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*. 31(2):387-395. DOI: <https://doi.org/10.7151/dmgt.1553>.
- [9] Septyanto F, Sugeng KA. 2017. Rainbow connection of graph joins. *Australasian Journal of Combinatorics: Special Issue in Memory of Mirka Miller*. 69(3):375-381.
- [10] Septyanto F, Sugeng KA. 2018. Color code techniques in rainbow connection. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*. 6(2):347-361. DOI: <https://dx.doi.org/10.5614/ejgta.2018.6.2.14>.