# PEMODELAN *HIDDEN* MARKOV UNTUK TRANSAKSI PELANGGAN

**MUNAWWAR, D.A.[1], B. SETIAWATY[2], DAN N. K. K. ARDANA[2]**

[1]Mahasiswa Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

[2]Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

**ABSTRAK.**Transaksi pelanggan dapat dimodelkan menggunakan *Hidden* Markov. Pendugaan parameter model dilakukan menggunakan Metode*Maximum Likelihood* Rabiner yang terdiri dari: Algoritme *Forward*, Algoritme Virtebi dan algoritme Baum Welch. Aplikasi pada data transaksi perusahaan seluler menunjukkan hasil yang memuaskan.

**Kata kunci:** Rantai Markov, *Hidden* Markov model, MetodeRabiner.

## 1. PENDAHULUAN

Model *Hidden* Markov terdiri dari sepasang proses stokastik yaitu proses observasi dan proses yang mempengaruhi terjadinya proses observasi. Proses yang mempengaruhi terjadinya proses observasi diasumsikan membentuk rantai Markov dan tidak diamati. Oleh sebab itu rantai Markov tersembunyi atau *hidden* dibalik proses observasi.

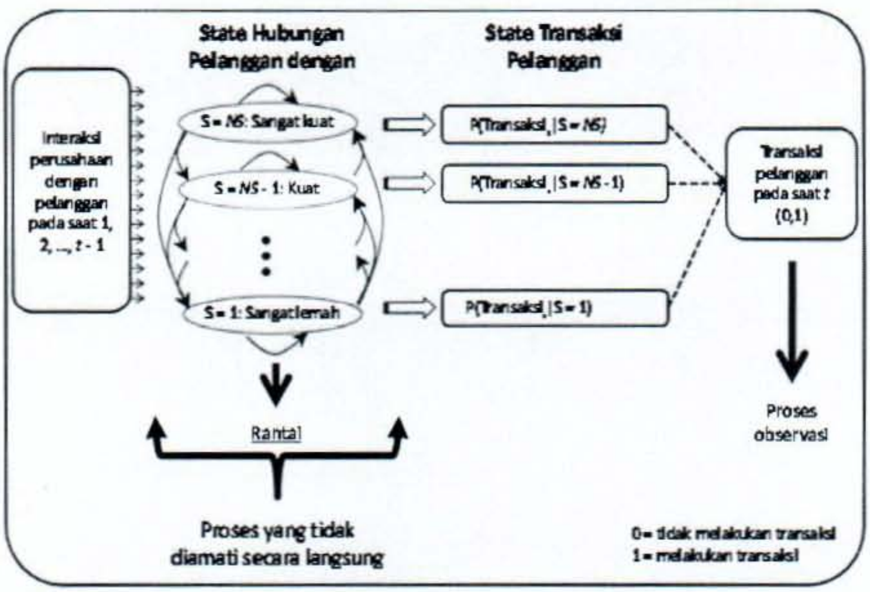
Secara umum, pertemuan yang terjadi antara pelanggan dengan perusahaan disebut pasar. Untuk membentuk sebuah pasar, diperlukan kegiatan transaksi yang dilakukan oleh pelanggan.Transaksi yang dilakukan oleh pelanggan dapat terjadi secara berulang sehingga membentuk deret waktu. Transaksi pelanggan dapat dipengaruhi antara lain oleh: kualitas pelayanan perusahaan, loyalitas pelanggan, dan adanya promosi serta *reward* yang dilakukan oleh perusahaan. Jika faktor yang mempengaruhi transaksi pelanggan diasumsikan tidak diamati secara langsung dan membentuk rantai Markov, maka transaksi pelanggan dapat dimodelkan menggunakan *Hidden* Markov.

Pada tulisan ini, hubungan transaksi pelangggan dengan perusahaan akan dimodelkan menggunakan model *Hidden* Markov yang dikembangkan oleh Netzer et. al.(2008).

Dari model yang diperoleh, *Customer Relationship Management* perusahaan dapat menganalisis transaksi tersebut untuk meningkatkan transaksi pelanggan di masa yang akan datang.

## 2. PEMODELAN TRANSAKSI PELANGGAN

**2.1 Transaksi Pelanggan:** Transaksi pelanggan adalah salah satu kegiatan yang diperlukan untuk membentuk sebuah pasar dan dapat terjadi kapan saja dalam suatu deret waktu yang panjang. Transaksi yang terjadi dipengaruhi oleh interaksi antara pelanggan dengan perusahaan yang terjadi secara berulang, seperti pelayanan perusahaan, loyalitas pelanggan, dan adanya promosi serta *reward* yang dilakukan oleh perusahaan.Transaksi tersebut mungkin saja terulang kembali di masa yang akan datang. Jika di waktu sebelumnya perusahaan memberikan pelayanan yang tidak baik kepada pelanggan, akibatnya hubungan antara pelanggan dengan perusahaan menjadi lebih lemah sehingga pelanggan tidak melakukan transaksi untuksaat ini. Demikian pula sebaliknya.




Gambar 1 Pemodelan Transaksi Pelanggan Menggunakan *Hidden* Markov

Dalam tulisan ini, proses interaksi antara pelanggan dengan perusahaan yang merupakan penyebab terjadinya transaksi, yaitu *S*, diasumsikan bersifat Markov. Artinya, meskipun di waktu yang lalu banyak terjadi interaksi antara pelanggan dengan perusahaan yang mempengaruhi terjadinya transaksi, tetapi penyebab terjadinya transaksi saat ini cukup dipengaruhi oleh interaksi satu waktu sebelumnya.

Proses transaksi pelanggan, yaitu $Y$, ditentukan melalui *state* transaksi pelanggan, di mana transaksi tersebut akan bernilai 1 jika pelanggan melakukan transaksi dan bernilai 0 jika pelanggan tidak melakukan transaksi (lihat Gambar 1).

2.2 **Model *Hidden* Markov untuk Transaksi Pelanggan:** Model *Hidden* Markov untuk transaksi pelanggan dicirikan oleh parameter sebagai berikut.

**a. Indeks**

$s$ = hubungan perusahaan dengan pelanggan, $s = 1, 2, \dots, NS$
$NS$ = Banyaknya *state* rantai Markov $S$
$t$ = waktu, $t = 1, 2, \dots, T$

**b. PeluangAwal**

$$\boldsymbol{\pi}_{is} = P(S_{i1} = s)$$

didefinisikan sebagai peluang hubungan perusahaan dengan pelanggan ke-$i$ pada *states* pada waktu ke-1.

**c. PeluangTransisi**

$$q_{itss'} = P(S_{it} = s'|S_{it-1} = s)$$

didefinisikan sebagai peluang transisi hubungan perusahaan dengan pelanggan ke-$i$ dari *states* pada waktu $t - 1$ ke *states'* pada waktu $t$, dengan $(\mathbf{Q}_i) = (q_{itss'})$ adalah matriks transisi Markov berukuran$NS \times NS$. Secara khusus, $q_{itss'}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$q_{its1} = \text{P(transisi dari } state\ s \text{ ke } state\ 1) = \frac{\exp(\mu(1)_{is} - \mathbf{a}'_{it}\boldsymbol{\rho}_{is})}{1 + \exp(\mu(1)_{is} - \mathbf{a}'_{it}\boldsymbol{\rho}_{is})}$$

$$q_{itss'} = \text{P(transisi dari } state\ s \text{ ke } state\ s') = \frac{\exp(\mu(s')_{is} - \mathbf{a}'_{it}\boldsymbol{\rho}_{is})}{1 + \exp(\mu(s')_{is} - \mathbf{a}'_{it}\boldsymbol{\rho}_{is})}$$

$$q_{itsNS} = \text{P(transisi dari } state\ s \text{ ke } state\ NS)$$
$$= 1 - \frac{\exp(\mu(NS-1)_{is} - \mathbf{a}'_{it}\boldsymbol{\rho}_{is})}{1 + \exp(\mu(NS-1)_{is} - \mathbf{a}'_{it}\boldsymbol{\rho}_{is})}$$

dan memenuhi sifat:

- $q_{itss'} = P(S_{it} = s'|S_{it-1} = s)$
- $0 \le q_{itss'} \le 1, \forall s, s'$
- $\sum_{s'} q_{itss'} = 1$
- $s' = 2, 3, \dots, NS - 1$

dimana

$\boldsymbol{\rho}_{is}$ = dampak pelanggan ke-$i$ yang bertransisi dari *state* $s$,
$\mathbf{a}_{it}$ = hubungan perusahaan dengan pelanggan ke-$i$ antara $t - 1$

sampai $t$,
$(\mu(s')_{is})$ = batas hubungan perusahaan dengan pelanggan ke-$i$ yang berada pada *states*.

DiasumsikanPeluang ini memenuhi persamaan $\boldsymbol{\pi}_i = \mathbf{Q}_i\boldsymbol{\pi}_i$, di mana $\mathbf{Q}_i$ adalah matrik stransisi.

**d. Peluang Transaksi Pelanggan**

$$P(Y_{it} = y|S_{it} = s) = m_{it|s}^{y}\left(1 - m_{it|s}\right)^{(1-y)}$$

dengan,

$$m_{it|s} = P(Y_{it} = 1|S_{it} = s)$$

didefinisikan sebagai peluang bahwa pelanggan ke-$i$ melakukan transaksi pada waktu $t$, dan

$$1 - m_{it|s} = P(Y_{it} = 0|S_{it} = s)$$

didefinisikan sebagai peluang bahwa pelanggan ke-$i$ tidak melakukan transaksi pada waktu $t$, di mana:

- $S_{it}$ adalah hubungan perusahaan dengan pelanggan ke-$i$ pada waktu $t$ yang merupakan proses Markov dengan ruang *state* $\{1, 2, 3, \ldots, NS\}$
- $Y_{it}$ adalah transaksi pelanggan ke-$i$ pada waktu $t$ dengan ruang *state* $\{0,1\}$.

Transaksi pelanggan diasumsikan bebas dan jika pelanggan melakukan transaksi, akan memenuhi persamaan,

$$m_{it|s} = \frac{\exp\,(\tilde{\beta}_{0s} + \mathbf{x}'_{it}\boldsymbol{\beta}_s)}{1 + \exp\,(\tilde{\beta}_{0s} + \mathbf{x}'_{it}\boldsymbol{\beta}_s)}$$

dengan,
$\tilde{\beta}_{0s}$ = koefisien *states*
$\mathbf{x}_{it}$ = rata-rata transaksi pelanggan ke-$i$ pada waktu $t$
$\boldsymbol{\beta}_s$ = respon pelanggan terhadap transaksi pada *state* $s$

dimana $\tilde{\beta}_{0s}$ dibatasi oleh:

$$\tilde{\beta}_{01} \leq \tilde{\beta}_{02} \leq \cdots \leq \tilde{\beta}_{0NS}$$

dan memenuhi,

$$\tilde{\beta}_{0s} = \beta_{01} + \sum_{s\prime=2}^{s} \exp(\beta_{0s\prime})\,;\; s = 2, \ldots, NS.$$

Definisikan matriks berukuran $2 \times 2$ , $\mathbf{M}_i = (m_{its})$.

**e. Peluang Transaksi Pelanggan**

Peluang barisan transaksi pelanggan adalah sebagai berikut,

$$P_i(Y_{i1} = y_{i1}, \dots, Y_{iT} = y_{iT})$$

$$= \sum_{s_1=1}^{NS} \sum_{s_2=1}^{NS} \dots \sum_{s_T=1}^{NS} \left[ P(S_{i1} = s_1). \prod_{\tau=2}^{T} P(S_{i\tau} = s_\tau | S_{i\tau-1} = s_{\tau-1}) . \prod_{\tau=1}^{T} P(Y_{i\tau} = y_{i\tau} | S_{i\tau} = s_\tau) \right]$$

$$= \sum_{s_1=1}^{NS} \sum_{s_2=1}^{NS} \dots \sum_{s_T=1}^{NS} \left[ \boldsymbol{\pi}_{is_1} \prod_{\tau=2}^{T} q_{is_t s_{\tau-1}} \prod_{\tau=1}^{T} m_{i\tau|s_\tau}^{y_{i\tau}} \left(1 - m_{i\tau|s}\right)^{(1-y_{i\tau})} \right].$$

Dari uraian di atas model Hidden Markov untuk transaksi pelanggan-$i$ ditentukan oleh parameter $\lambda_i = (\mathbf{M}_i, \mathbf{Q}_i, \boldsymbol{\pi}_i, NS)$. Transaksi ini memiliki dampak jangka panjang yang dicirikan oleh vektor $\mathbf{a}_{it}$ dan dampak jangka pendek yang dicirikan oleh vektor $\mathbf{x}_{it}$.

Untuk memodelkan transaksi 1 pelanggan, parameter model di atas dapat ditulis dalam bentuk lebih sederhana $\lambda = (\mathbf{M}, \mathbf{Q}, \boldsymbol{\pi}, NS)$, di mana $\mathbf{Q} = (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{a}, \mu)$ dan $\mathbf{M} = (\tilde{\beta}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{x})$.

**2.3 Estimasi Parameter:** Dalam proses estimasi diasumsikan banyaknya pelanggan adalah satu. Berdasarkan barisan observasi (data transaksi) $y_1, y_2, \dots, y_T$ akan diestimasi parameter model $\lambda = (\mathbf{M}, \mathbf{Q}, \boldsymbol{\pi}, NS)$ menggunakan metode Rabiner(Wijayanti 2010).

Tujuan metode Rabiner adalah:

1. Menduga barisan observasi$\{\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_T\}$, dan
2. Menentukan nilai parameter duga $\bar{\lambda} = (\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{Q}}, \bar{\boldsymbol{\pi}}, NS)$ yang memaksimumkan fungsi *Likelihood*, yaitu$L(\lambda) = P(Y_1 = \hat{y}_1, Y_2 = \hat{y}_2, \dots, Y_T = \hat{y}_T)$.

Langkah-langkah algoritme pemrograman untuk metode Rabiner dalam pemodelan transaksi pelanggan adalah sebagai berikut:

1. Menginput data $\{y_1, y_2, \dots, y_t\}$ (banyaknya data adalah $T$)
2. Menginput $Seed\ Random$ awal, $z = 1$ (berfungsi untuk mencatat nilai parameter yang telah dibangkitkan)
3. Menetapkan $NS = 2, \dots, 10$ ($NS$ adalah banyaknya *state* penyebab kejadian)
4. Membangkitkan nilai peluang awal$\lambda = (\mathbf{M}, \mathbf{Q}, \boldsymbol{\pi})$ yang dibangkitkan secara acak dan dicatat dengan $Seed\ Random[z]$. $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_i)_{1\times NS}$, $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{NS\times NS}$, $\mathbf{M} = (m_i(j))_{NS\times 2}$, dan memenuhi:
   a. $\sum_{i=1}^{NS} \pi_i = 1, \boldsymbol{\pi} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\pi}$.
   b. $\sum_{j=1}^{NS} q_{ij} = 1,\ 1 \le i \le NS$.
   c. $\sum_{j=1}^{2} m_i(j) = 1,\ 1 \le i \le NS$.

5. Menggunakan algoritme *forward*.

Tujuan algoritme *forward* adalah menghitung nilai $L(\lambda)$. Nilai $L(\lambda)$, dapat diperoleh dengan cara menghitung nilai $\sum_{j=1}^{NS} \alpha_T(j)$. Nilai $\alpha_T(j)$ diperoleh dengan cara menghitung nilai $\alpha_t(j)$ secara rekursif untuk $t = 1, 2, \ldots, T$.

$$\alpha_1(j) = m_j(y_1).\pi_j, \qquad j = 1,2,\ldots,NS$$
$$\alpha_2(j) = \sum_{i=1}^{NS} \alpha_1(i).q_{ij}.m_j(y_2), \qquad j = 1,2,\ldots,NS$$
$$\alpha_3(j) = \sum_{i=1}^{NS} \alpha_2(i).q_{ij}.m_j(y_3), \qquad j = 1,2,\ldots,NS$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\alpha_T(j) = \sum_{i=1}^{NS} \alpha_{T-1}(i).q_{ij}.m_j(y_T), \qquad j = 1,2,\ldots,NS$$

6. Menggunakan algoritme Viterbi.

   Tujuan algoritme viterbi adalah mencari barisan$s_1, s_2, \ldots, s_T$ yang membuat nilai $L(\lambda)$ maksimum. Barisan $s_1, s_2, \ldots, s_T$ yang membuat nilai $L(\lambda)$ maksimum, dapat diperoleh dengan cara menghitung nilai $\delta_T(j)$ terlebih dahulu. Nilai $\delta_T(j)$ diperoleh dengan cara menghitung nilai $\delta_t(j)$ secara rekursif untuk $t = 1,2,\ldots,T$.

$$\delta_1(j) = m_j(y_1).\pi_j, \qquad j = 1,2,\ldots,NS$$
$$\delta_2(j) = \left[\max_{i=1,2,3,\ldots,NS} \delta_1(j).q_{ij}\right] m_j(y_2), \qquad j = 1,2,\ldots,NS$$
$$\delta_3(j) = \left[\max_{i=1,2,3,\ldots,NS} \delta_2(j).q_{ij}\right] m_j(y_3), \qquad j = 1,2,\ldots,NS$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\delta_T(j) = \left[\max_{i=1,2,3,\ldots,NS} \delta_{T-1}(j).q_{ij}\right] m_j(y_T), \qquad j = 1,2,\ldots,NS$$

Melalui nilai $\delta_T(j)$ yang telah diperoleh, maka dapat ditentukan *state* yang menghasilkan nilai $\delta_t(j)$, dengan cara menelusuri kembali $\delta_t(j)$ melalui perhitungan nilai $j_*(t)$ untuk $t = T, T-1, T-2, \ldots, 1$.

$$\begin{aligned} j_*(T) &= \arg\max_{i=1,2,3,\ldots,NS} \delta_T(i) \\ j_*(T-1) &= \psi_T(j_*(T)) \\ j_*(T-2) &= \psi_{T-1}(j_*(T-1)) \\ &\vdots \\ j_*(1) &= \psi_2(j_*(2)) \end{aligned}$$

dengan $\psi_t(j)$ adalah barisan yang menghasilkan $\delta_t(j)$, yaitu

$$\psi_t(j) = \arg\max_{i=1,2,3,\ldots,NS} \delta_{t-1}(j).q_{ij}, j = 1,2,\ldots,NS.$$

7. Menduga barisan observasi $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_T$ berdasarkan barisan *state* $s_1, s_2, \ldots, s_T$ yang membuat nilai $L(\lambda)$ maksimum.
8. Jika barisan observasi yang duga $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_T$ memiliki ketepatan lebih besar dari 80% maka hal-hal di bawah ini disimpan:
   - Nilai observasi duga $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_T$,
   - Nilai persentase ketepatan dugaan terbesar, dan
   - Frekuensi nilai peluang yang dibangkitkan.
9. Kembali ke langkah ke-5, dan lakukan untuk $z = z + 1, z + 2, \ldots, 2000$.
10. Menggunakan algoritme Baum-Welch.
    Tujuan algoritme Baum-Welch adalah menentukan nilai $\overline{\lambda} = (\bar{M}, \bar{Q}, \bar{\pi})$ sehingga $L(\bar{\lambda})$ maksimum.

    Berikut Algoritme EM:
    a. Berikan nilai parameter$\lambda_t = (M, Q, \pi)$,
    b. Hitung fungsi Baum-Welch $Q(\lambda, \lambda_t) = E_{\lambda_t}\left[\frac{dP_\lambda}{dP_{\lambda_t}} | Y_T\right]$.
    c. Jika kondisi berikut terpenuhi:

    $$\bar{\lambda} = \underset{\lambda}{\operatorname{argmax}}\, Q(\lambda, \lambda_t) \quad \Rightarrow L(\bar{\lambda}) \geq L(\lambda_t)$$

    maka $\lambda_{t+1} = \bar{\lambda}$. Jika tidak terpenuhi, maka$\lambda_{t+1} = \lambda_t$, lalu ulangi prosedur a.

    Dengan menggunakan Metode Lagrange, dapat diperoleh kondisi parameter yang membuat$L(\lambda)$ maksimum.

$$\bar{\pi}_i = \gamma_1(i), \qquad i = 1,2, \ldots, NS$$

$$\bar{q}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}, \qquad i = 1,2, \ldots, NS, \quad j = 1,2, \ldots, NS$$

$$\bar{m}_i(j) = \frac{\sum_{t=1\ s.t\ y_t=j}^{T} \gamma_t(i)}{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(i)}, \qquad i = 1,2, \ldots, NS, \quad j = 1,2, \ldots, NS$$

dengan:

$$\gamma_t(i) = \sum_{j=1}^{NS} \xi_t(i,j), \qquad i = 1,2, \ldots, NS, \quad j = 1,2, \ldots, NS$$

$$\xi_t(i,j) = \frac{\alpha_t(j).q_{ij}.m_i(j).\beta_{t+1}(j)}{\sum_{j=1}^{NS} \alpha_t(j).\beta_t(j)}, \qquad i = 1,2, \ldots, NS, \quad j = 1,2, \ldots, NS$$

Nilai $\beta_t(j)$ dan $\beta_{t+1}(j)$ diperoleh dengan menggunakan algoritme *backward*, yang dihitung secara rekursi f untuk $t = T, T-1, \ldots, 1$.

$$\beta_T(j) = 1, \qquad j = 1,2,\ldots,NS$$

$$\beta_{T-1}(j) = \sum_{i=1}^{NS} m_i(y_T)\,.\,\beta_T(i).\,q_{ij}, \qquad j = 1,2,\ldots,NS$$

$$\beta_{T-2}(j) = \sum_{i=1}^{NS} m_i(y_{T-1})\,.\,\beta_{T-1}(i).\,q_{ij}, \qquad j = 1,2,\ldots,NS$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

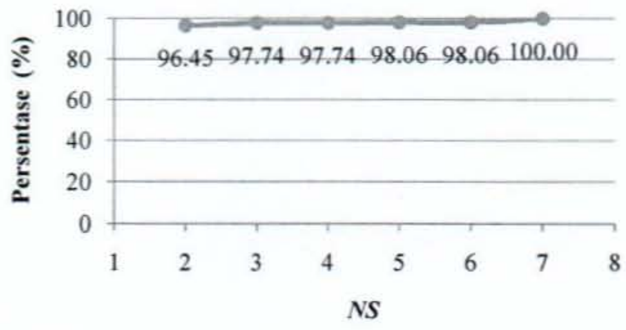
$$\beta_1(j) = \sum_{i=1}^{NS} m_i(y_2)\,.\,\beta_2(i).\,q_{ij}, \qquad j = 1,2,\ldots,NS$$

d. Mencetak nilai parameter duga $\bar{\lambda} = (\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{Q}}, \bar{\boldsymbol{\pi}})$.
e. Mencetak grafik persentase ketepatan barisan observasi duga $\{\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_T\}$.
f. Kembali ke langkah ke-3, lakukan untuk $NS = NS+1$.
g. Berhenti di $NS = 10$ atau saat nilai perubahan persentase kurang dari 1%.

## 3. APLIKASI PEMODELAN TRANSAKSI PELANGGAN

3.1**Deskripsi Data:** Data yang digunakan dalam karya ilmiah ini berasal dari data transaksi yang dilakukan oleh "Anisa Cell" kepada suppliernya yaitu "Cempaka Cell" sejak 11 April 2011 sampai dengan 14 Februari 2012, sehingga terdapat 310 data observasi $\{Y_t\}$. Jika "Anisa Cell" melakukan transaksi lebih dari satu kali pada hari tersebut, maka akan diberi nilai 1 dan akan diberi nilai 0 jika pada hari tersebut tidak melakukan transaksi. Data selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran.

**3.2 Hasil:** Dengan menggunakan metode Rabiner dan *software Mathematica*7.0, melalui data yang telah diperoleh akan dihasilkan persentase ketepatan dugaan barisan observasi dan nilai parameter dugaan $\bar{\lambda} = (\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{Q}}, \bar{\boldsymbol{\pi}}, NS)$. Persentase ini terus meningkat, seiring dengan bertambahnya nilai $NS$.




Gambar 2 Persentase Ketepatan Dugaan Barisan Observasi Terhadap $NS$

Dari Gambar 2 terlihat bahwa persentase ketepatan dugaan tidak berubah secara signifikan setelah $NS = 3$. Makin sederhana suatu model makin baik, maka digunakan nilai parameter dugaan saat$NS = 3$, yang diperoleh sebagai berikut.

$$\bar{\boldsymbol{\pi}} = [0.407861940497921 \quad 0.386775293017482 \quad 0.205362766484597] \tag{1}$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = (\boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}, \mu) = \begin{bmatrix} 0.5099666271871730.2375233536165420.252510019196286 \\ 0.4556504772323270.3290466398898670.215302882877804 \\ 0.1901700484977980.5705821700418550.239247781460348 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\bar{\mathbf{M}} = (\tilde{\beta}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.5024098076777940.497590192322207 \\ 0.5479154738741570.452084526125843 \\ 0.6125761393138430.387423860686157 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh nilai $\mathbf{a}_{it}$ dan $\mathbf{x}_{it}$ sebagai berikut,

$$\mathbf{a}_{it} = \left[(10000001.1278125), \begin{pmatrix} 7.86055314275669 \\ 0.201392753125 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11.7879346411978 \\ 0.193164260352726 \\ 0.181239818791844 \end{pmatrix}\right]$$

$$\mathbf{x}_{it} = \left[(0), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

Dari hasil yang telah diperoleh, vektor-vektor yang terdapat di dalam $\mathbf{a}_{it}$ memiliki nilai yang lebih besar dan beragam dibandingkan dengan vektor-vektor yang terdapat di dalam $\mathbf{x}_{it}$ yang hanya memiliki nilai 0 di setiap vektornya. Sehingga interaksi yang memiliki dampak jangka panjang, memiliki nilai yang jauh lebih besar dibandingkan dengan interaksi yang memiliki dampak jangka pendek.

Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa interaksi yang paling mempengaruhi transaksi yang dilakukan "Anisa Cell" adalah interaksi yang memiliki dampak jangka panjang, seperti diberikannya informasi mengenai cara mengembangkan usaha setiap bulannya serta iklan yang mendukung usaha tersebut.

## DAFTAR PUSTAKA

[1] **Netzer O, Lattin JM, Srinivasan V**. 2008. A Hidden Markov Model of Customer Relationship Dynamics. *Journal of Marketing Science* 27:185-204.

[2] **Wijayanti, H**. 2010. *Kajian Model Hidden Markov Diskret dengan Algoritme Rabiner dan Aplikasinya pada DNA*. Tesis. Institut Pertanian Bogor.

**LAMPIRAN**

Tabel 1 Data Transaksi "Anisa Cell"terhadap "Cempaka Cell"

| $t$ | $Y_t$ | $t$ | $Y_t$ | $t$ | $Y_t$ | $t$ | $Y_t$ | $t$ | $Y_t$ | $t$ | $Y_t$ | $t$ | $Y_t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 26 | 1 | 51 | 1 | 76 | 1 | 101 | 0 | 126 | 1 | 151 | 0 |
| 2 | 0 | 27 | 0 | 52 | 0 | 77 | 1 | 102 | 1 | 127 | 0 | 152 | 1 |
| 3 | 0 | 28 | 1 | 53 | 1 | 78 | 1 | 103 | 1 | 128 | 1 | 153 | 0 |
| 4 | 0 | 29 | 1 | 54 | 1 | 79 | 0 | 104 | 1 | 129 | 0 | 154 | 0 |
| 5 | 0 | 30 | 0 | 55 | 1 | 80 | 1 | 105 | 1 | 130 | 0 | 155 | 1 |
| 6 | 0 | 31 | 1 | 56 | 1 | 81 | 0 | 106 | 1 | 131 | 1 | 156 | 1 |
| 7 | 0 | 32 | 0 | 57 | 1 | 82 | 0 | 107 | 1 | 132 | 1 | 157 | 1 |
| 8 | 1 | 33 | 1 | 58 | 1 | 83 | 1 | 108 | 0 | 133 | 1 | 158 | 1 |
| 9 | 0 | 34 | 1 | 59 | 1 | 84 | 1 | 109 | 1 | 134 | 1 | 159 | 1 |
| 10 | 0 | 35 | 1 | 60 | 0 | 85 | 0 | 110 | 0 | 135 | 0 | 160 | 0 |
| 11 | 0 | 36 | 0 | 61 | 0 | 86 | 1 | 111 | 1 | 136 | 1 | 161 | 0 |
| 12 | 0 | 37 | 1 | 62 | 1 | 87 | 0 | 112 | 1 | 137 | 1 | 162 | 0 |
| 13 | 0 | 38 | 1 | 63 | 0 | 88 | 0 | 113 | 0 | 138 | 0 | 163 | 0 |
| 14 | 0 | 39 | 1 | 64 | 1 | 89 | 0 | 114 | 1 | 139 | 0 | 164 | 0 |
| 15 | 0 | 40 | 1 | 65 | 0 | 90 | 1 | 115 | 1 | 140 | 0 | 165 | 1 |
| 16 | 0 | 41 | 1 | 66 | 1 | 91 | 1 | 116 | 1 | 141 | 0 | 166 | 0 |
| 17 | 0 | 42 | 1 | 67 | 1 | 92 | 1 | 117 | 1 | 142 | 1 | 167 | 1 |
| 18 | 0 | 43 | 1 | 68 | 1 | 93 | 1 | 118 | 1 | 143 | 1 | 168 | 0 |
| 19 | 0 | 44 | 0 | 69 | 0 | 94 | 1 | 119 | 1 | 144 | 0 | 169 | 1 |
| 20 | 0 | 45 | 1 | 70 | 0 | 95 | 1 | 120 | 0 | 145 | 1 | 170 | 0 |
| 21 | 1 | 46 | 1 | 71 | 0 | 96 | 1 | 121 | 1 | 146 | 0 | 171 | 0 |
| 22 | 1 | 47 | 0 | 72 | 0 | 97 | 1 | 122 | 0 | 147 | 1 | 172 | 1 |
| 23 | 0 | 48 | 1 | 73 | 1 | 98 | 1 | 123 | 1 | 148 | 0 | 173 | 1 |
| 24 | 0 | 49 | 1 | 74 | 1 | 99 | 1 | 124 | 0 | 149 | 1 | 174 | 0 |
| 25 | 1 | 50 | 1 | 75 | 1 | 100 | 0 | 125 | 1 | 150 | 0 | 175 | 0 |

| $t$ | $Y_t$ | $t$ | $Y_t$ | $t$ | $Y_t$ | $t$ | $Y_t$ | $t$ | $Y_t$ | $t$ | $Y_t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 176 | 0 | 201 | 0 | 226 | 0 | 251 | 1 | 276 | 1 | 301 | 0 |
| 177 | 0 | 202 | 0 | 227 | 1 | 252 | 1 | 277 | 0 | 302 | 0 |
| 178 | 1 | 203 | 0 | 228 | 1 | 253 | 1 | 278 | 1 | 303 | 1 |
| 179 | 1 | 204 | 1 | 229 | 1 | 254 | 1 | 279 | 1 | 304 | 0 |
| 180 | 1 | 205 | 0 | 230 | 0 | 255 | 1 | 280 | 1 | 305 | 1 |
| 181 | 0 | 206 | 0 | 231 | 1 | 256 | 1 | 281 | 1 | 306 | 0 |
| 182 | 1 | 207 | 0 | 232 | 1 | 257 | 1 | 282 | 1 | 307 | 0 |
| 183 | 0 | 208 | 0 | 233 | 1 | 258 | 0 | 283 | 0 | 308 | 0 |
| 184 | 0 | 209 | 0 | 234 | 0 | 259 | 0 | 284 | 1 | 309 | 0 |
| 185 | 0 | 210 | 0 | 235 | 0 | 260 | 0 | 285 | 0 | 310 | 0 |
| 186 | 0 | 211 | 1 | 236 | 1 | 261 | 0 | 286 | 1 | | |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 187 | 0 | 212 | 0 | 237 | 1 | 262 | 1 | 287 | 1 | | |
| 188 | 0 | 213 | 1 | 238 | 0 | 263 | 1 | 288 | 0 | | |
| 189 | 0 | 214 | 0 | 239 | 1 | 264 | 1 | 289 | 1 | | |
| 190 | 0 | 215 | 1 | 240 | 1 | 265 | 1 | 290 | 0 | | |
| 191 | 1 | 216 | 0 | 241 | 0 | 266 | 1 | 291 | 1 | | |
| 192 | 1 | 217 | 1 | 242 | 1 | 267 | 0 | 292 | 0 | | |
| 193 | 1 | 218 | 1 | 243 | 1 | 268 | 1 | 293 | 1 | | |
| 194 | 0 | 219 | 0 | 244 | 1 | 269 | 1 | 294 | 1 | | |
| 195 | 1 | 220 | 0 | 245 | 0 | 270 | 1 | 295 | 0 | | |
| 196 | 0 | 221 | 1 | 246 | 0 | 271 | 0 | 296 | 0 | | |
| 197 | 0 | 222 | 0 | 247 | 1 | 272 | 1 | 297 | 0 | | |
| 198 | 1 | 223 | 1 | 248 | 1 | 273 | 0 | 298 | 1 | | |
| 199 | 1 | 224 | 1 | 249 | 1 | 274 | 1 | 299 | 0 | | |
| 200 | 1 | 225 | 1 | 250 | 1 | 275 | 0 | 300 | 1 | | |