

PENYELESAIAN PERSAMAAN GERAK GELOMBANG TAKLINEAR DENGAN MENGGUNAKAN PENDEKATAN HOMOTOPI

JAHARUDDIN¹⁾, FAHRURRAZI²⁾, DAN F. HANUM¹⁾

¹⁾Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680 Indonesia

²⁾Mahasiswa Program S2 Matematika Terapan
Sekolah Pascasarjana, IPB
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680 Indonesia

Abstrak : Metode homotopi merupakan suatu metode pendekatan analitik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah taklinear. Metode homotopi tersebut digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas yang muncul pada formulasi gelombang taklinear. Hasil yang diperoleh berupa rumus rekursif dengan pendekatan awal dimisalkan dalam bentuk gelombang sinusoidal. Selain itu diberikan pula grafik kebergantungan kecepatan phase gelombang terhadap kecuraman gelombang.

Kata kunci: metode homotopi, gelombang taklinear, dan masalah nilai batas.

1. PENDAHULUAN

Masalah gelombang baik permukaan maupun internal merupakan suatu masalah taklinear, yang sulit diselesaikan secara analitik. Hal ini yang menarik perhatian peneliti sejak pertengahan abad ke-19 untuk mendapatkan suatu metode yang efisien untuk menyelesaikan masalah gelombang baik secara analitik, maupun secara numerik. Stokes menggunakan metode perturbasi untuk mendapatkan solusi hampiran dari amplitudo gelombang sampai orde ke-5 [5]. Beberapa peneliti telah menerapkan metode perturbasi yang dilakukan Stokes, seperti Schwartz dengan menghitung solusi hampiran dari amplitudo gelombang hingga orde ke-58 [4]. Longuet-Higgins memperluas yang dilakukan Stokes untuk menghitung amplitudo gelombang sampai orde tinggi dan memeriksa pula kestabilan solusinya [3]. Chen dan Saffman menggunakan analisis numerik untuk memperlihatkan bifurkasi pada titik tetap untuk gelombang internal pada fluida yang tunak [1]. Liao [2] memperkenalkan suatu metode yang disebut metode homotopi untuk menyelesaikan masalah persamaan diferensial tak linear.

Dalam tulisan ini akan digunakan metode homotopi untuk menyelesaikan masalah gelombang permukaan dengan syarat batas taklinear pada batas permukaan untuk fluida dengan kedalaman yang cukup besar. Berdasarkan metode homotopi ini akan diperoleh hampiran untuk kecepatan potensial, simpangan dan kecepatan phase gelombang permukaan. Selanjutnya akan digambarkan hubungan kecepatan phase gelombang permukaan dan kecuraman gelombang dengan menggunakan bantuan *software Maple*.

2. ANALISIS METODE

Pada bagian ini akan dibahas metode homotopi untuk menjelaskan gerak gelombang permukaan dengan kedalaman yang cukup besar. Model matematika yang ditinjau diberikan oleh persamaan berikut:

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0, \quad \text{dengan } -\infty < x < \infty, -\infty < y < \zeta(x), \quad (2.1)$$

dengan syarat batas

$$C^2 \phi_{xx} + g \phi_y + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) - 2C \nabla \phi \cdot \nabla \phi_x = 0 \quad \text{di } y = \zeta(x), \quad (2.2)$$

$$\zeta(x) = \frac{1}{g} (C \phi_x - \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi) \quad \text{di } y = \zeta(x), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{untuk } y \rightarrow -\infty. \quad (2.4)$$

Fungsi $\phi(x, y)$ dan $\zeta(x)$ masing-masing menyatakan kecepatan potensial dan simpangan gelombang. Sedangkan C dan g masing-masing menyatakan kecepatan fase gelombang dan percepatan gravitasi. Penyelesaian persamaan (2.1) berupa fungsi $\phi(x, y)$ yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\phi(x, y) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{m,n} \exp(mky) \sin(nkx), \quad (2.5)$$

sedangkan batas permukaan $y = \zeta(x)$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\zeta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \cos(nkx). \quad (2.6)$$

Berikut ini akan ditentukan penyelesaian dari masalah nilai batas (2.1)-(2.4) dengan menggunakan metode homotopi. Dalam metode ini, suatu operator linear \mathcal{L} dipilih berdasarkan syarat batas (2.2), yaitu

$$\mathcal{L} [\Phi(x, y; q), \Lambda(q)] = \Lambda^2(q) \frac{\partial^2 \Phi(x, y; q)}{\partial x^2} + g \frac{\partial \Phi(x, y; q)}{\partial y},$$

dengan parameter $q \in [0, 1]$, $\Lambda(q)$ dan $\Phi(x, y; q)$ merupakan suatu fungsi real. Selain itu berdasarkan syarat batas (2.2) dan (2.3) didefinisikan dua operator taklinear berikut:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} [\Phi(x, y; q), \Lambda(q)] &= \Lambda^2(q) \Phi_{xx}(x, y; q) + g \Phi_y(x, y; q) \\ &\quad + 1/2 \nabla \Phi(x, y; q) \nabla [\nabla \Phi(x, y; q) \nabla \Phi(x, y; q)] \\ &\quad - 2\Lambda(q) \nabla \Phi(x, y; q) \nabla \Phi_x(x, y; q) \\ \mathcal{Z} [\Phi(x, y; q), \Lambda(q)] &= \frac{1}{g} \left[\Lambda(q) \Phi_x(x, y; q) - \frac{1}{2} \nabla \Phi(x, y; q) \nabla \Phi(x, y; q) \right] \end{aligned}$$

sehingga terdapat pemetaan: $\phi(x, y) \rightarrow \Phi(x, y; q)$, $\zeta(x) \rightarrow \eta(x; q)$ dan $C \rightarrow \Lambda(q)$. Pemetaan - pemetaan tersebut dikonstruksi dengan memperhatikan nilai parameter q yang berubah dari 0 ke 1, yang mengakibatkan $\Phi(x, y; q)$, $\eta(x; q)$ dan $\Lambda(q)$ masing - masing berubah dari solusi pendekatan awal menjadi solusi eksak $\phi(x, y)$, $\zeta(x)$ dan C . Persamaan (2.1) - (2.4) memberikan persamaan untuk deformasi orde nol berikut:

$$\nabla^2 \Phi(x, y; q) = 0 \text{ untuk } (x, y) \in \bar{\Omega}, \tag{2.7}$$

dengan syarat batas di $y = \eta(x; q)$ adalah

$$(1 - q) \mathcal{L}[\Phi(x, y; q) - \phi_0(x, y), \Lambda(q)] = q \hbar_1 \mathcal{H}_1(x) \mathcal{N}[\Phi(x, y; q), \Lambda(q)], \tag{2.8}$$

$$(1 - q) [\eta(x; q) - \zeta_0(x)] = q \hbar_2 \mathcal{H}_2(x) \{ \eta(x; q) - \mathcal{Z}[\Phi(x, y; q), \Lambda(q)] \} \tag{2.9}$$

dan
$$\frac{\partial \Phi(x, y; q)}{\partial y} = 0 \text{ untuk } y \rightarrow -\infty \tag{2.10}$$

dengan $\bar{\Omega}(q) = \{(x, y) | -\infty \leq x \leq \infty, -\infty \leq y \leq \eta(x; q)\}$.

Berdasarkan persamaan (2.8) dan (2.9), maka untuk $q = 0$ diperoleh

$$\Phi(x, y; 0) = \phi_0(x, y), \quad \eta(x; 0) = \zeta_0(x), \quad \Lambda(0) = C_0,$$

yang masing - masing merupakan solusi pendekatan awal untuk $\phi(x, y)$, $\zeta(x)$ dan C . Selanjutnya, untuk $q = 1$ diperoleh

$$\Phi(x, y; 1) = \phi(x, y), \quad \eta(x; 1) = \zeta(x), \quad \Lambda(1) = C.$$

Berdasarkan persamaan (2.5) dan (2.6), solusi pendekatan awal dari $\phi(x, y)$ dan $\zeta(x)$ didefinisikan berikut:

$$\phi_0(x, y) = AC_0 \exp(ky) \sin(kx), \quad \text{dan} \quad \zeta_0(x) = 0,$$

dengan A dan C_0 berturut - turut menyatakan amplitudo dan kecepatan phase gelombang permukaan. Pemilihan pendekatan awal tersebut menjamin adanya fungsi $\Phi(x, y; q)$ yang dapat diturunkan hingga m kali terhadap q .

Turunan ke m dari fungsi $\Phi(x, y; q)$, $\eta(x; q)$, dan $\Lambda(q)$ terhadap q di $q = 0$ masing-masing dinotasikan sebagai berikut:

$$\phi_m(x, y) = \left. \frac{\partial^m \Phi(x, y; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad \zeta_m(x) = \left. \frac{\partial^m \eta(x; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad C_m = \left. \frac{d^m \Lambda(q)}{dq^m} \right|_{q=0}$$

Deret Taylor dari fungsi $\Phi(x, y; q)$, $\eta(x; q)$, dan $\Lambda(q)$ di sekitar $q = 0$ masing-masing adalah:

$$\Phi(x, y; q) = \Phi(x, y; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\phi_m(x, y)}{m!} q^m = \phi_0(x, y) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\phi_m(x, y)}{m!} q^m$$

$$\eta(x; q) = \eta(x; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\zeta_m(x)}{m!} q^m = \zeta_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\zeta_m(x)}{m!} q^m,$$

$$\Lambda(q) = \Lambda(0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{C_m}{m!} q^m = C_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{C_m}{m!} q^m.$$

Dengan demikian untuk $q = 1$ diperoleh

$$\phi(x, y) = \phi_0(x, y) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\phi_m(x, y)}{m!}, \tag{2.11}$$

$$\zeta(x) = \zeta_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\zeta_m(x)}{m!}, \quad (2.12)$$

$$C = C_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{C_m}{m!}. \quad (2.13)$$

Hasil ini menunjukkan hubungan antara solusi masalah nilai batas (2.1)-(2.4) dan solusi pendekatan awal $\phi_0(x, y)$, $\zeta_0(x)$, dan C_0 .

Berikut ini akan ditentukan fungsi $\phi_m(x, y)$, $\zeta_m(x)$, dan C_m . Jika kedua ruas pada persamaan (2.7) dan (2.10) diturunkan terhadap q hingga m kali, maka di $q = 0$ diperoleh persamaan untuk deformasi orde tinggi berikut

$$\nabla^2 \phi_m(x, y) = 0 \text{ di } (x, y) \in \Omega_0,$$

dengan syarat batas

$$\frac{\partial \phi_m(x, y)}{\partial y} = 0, \text{ untuk } y \rightarrow -\infty,$$

dimana $\Omega_0 = \{(x, y) | -\infty < x < \infty, -\infty < y \leq \zeta_0(x)\}$. Selanjutnya diperkenalkan operator berikut:

$$\frac{D}{Dq} = \frac{\partial}{\partial q} + \eta'(x; q) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Deret Taylor fungsi $\Phi(x, y; q)$ dengan $y = \eta(x; q)$ di sekitar $q = 0$ adalah

$$\Phi(x, y; q) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^m \Phi(x, y; q)}{Dq^m} \Big|_{q=0} \left(\frac{q^m}{m!} \right),$$

sehingga deret Taylor fungsi $\Phi(x, y; q)$ di $y = \eta(x; 0)$ adalah

$$\Phi(x, y; q) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Phi(x, y; q)}{\partial q^n} \Big|_{y=\eta(x; 0)} (\eta(x; q) - \eta(x; 0))^n. \quad (2.14)$$

Selain itu, deret Taylor fungsi $\Phi(x, y; q)$ di sekitar $q = 0$ adalah

$$\Phi(x, y; q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\partial^n \Phi^r(x, y; q)}{\partial y^n} \Big|_{q=0} \left(\frac{q^r}{n!r!} \right) [\eta(x; q) - \eta(x; 0)]^n, \quad (2.15)$$

$$\text{dengan } \Phi^r(x, y; q) = \frac{1}{r!} \frac{\partial^r \Phi(x, y; q)}{\partial q^r} \Big|_{q=0}.$$

Jika persamaan (2.14) disamakan dengan persamaan (2.15), maka diperoleh

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^m \Phi(x, y; q)}{Dq^m} \Big|_{q=0} \left(\frac{q^m}{m!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\partial^n \Phi^r(x, y; q)}{\partial y^n} \Big|_{q=0} \left(\frac{q^r}{n!r!} \right) \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{q^m}{m!} \right) \zeta_m(x) \right]^n.$$

Jika kedua ruas pada persamaan di atas diuraikan dan pangkat dari q disamakan, maka diperoleh

$$\frac{D^m \Phi(x, y; q)}{Dq^m} = \Phi^m(x, y; q) + \mathbf{R}_m[\Phi(x, y; q), \Lambda(q)], \quad (2.16)$$

dengan

$$\mathcal{R}_m[\Phi(x, y; q), \Lambda(q)] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\Phi(x, y; q), \Lambda(q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0}$$

Jika kedua ruas pada persamaan (2.8) diturunkan terhadap q hingga m kali dan mengevaluasi di $q = 0$, maka di $y = \zeta_0(x)$ diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{D^m \mathbf{L}[\Phi(x, y; q), \Lambda(q)]}{Dq^m} \Big|_{q=0} &= m \left(\chi_m \frac{D^{m-1} \mathbf{L}[\Phi(x, y; q), \Lambda(q)]}{Dq^{m-1}} \right) \Big|_{q=0} \\ &+ h_1 H_1(x) \left(\frac{D^{m-1} \mathbf{N}[\Phi(x, y; q), \Lambda(q)]}{Dq^{m-1}} \right) \Big|_{q=0} \end{aligned} \quad (2.17)$$

dengan

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Jika operator \mathbf{L} dikenakan operator D/Dq hingga m kali, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{D^m \mathbf{L}[\Phi(x, y; q), \Lambda(q)]}{Dq^m} \Big|_{q=0} &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{D^i [\Lambda^2(q)]}{Dq^i} \frac{D^{m-1} \Phi_{xx}(x, y; q)}{Dq^{m-1}} \Big|_{q=0} \\ &+ g \frac{D^m \Phi_y(x, y; q)}{Dq^m} \Big|_{q=0} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Selain itu, kedua ruas pada persamaan (2.9) diturunkan dengan operator D/Dq hingga m kali, diperoleh

$$\zeta_m(x) = m \left\{ \chi_m \zeta_{m-1}(x) + h_2 H_2(x) \left[\zeta_{m-1}(x) - \frac{D^{m-1} \mathbf{Z}[\Phi(x, y; q), \Lambda(q)]}{Dq^{m-1}} \right] \right\} \quad (2.19)$$

Kemudian substitusikan persamaan (2.16) dan (2.17) ke persamaan (2.18), maka untuk $y = \zeta_0(x)$ diperoleh

$$C_0^2 \frac{\partial^2 \phi_m(x, y)}{\partial x^2} + g \frac{\partial \phi_m(x, y)}{\partial y} = S_m(x, \vec{\phi}_{m-1}, \vec{\zeta}_m, \vec{C}_m), \quad (2.20)$$

dengan

$$\begin{aligned} S_m(x, \vec{\phi}_{m-1}, \vec{\zeta}_m, \vec{C}_m) &= m \left(\chi_m \frac{D^{m-1} \mathbf{L}[\Phi(x, y; q), \Lambda(q)]}{Dq^{m-1}} \right) \Big|_{q=0} \\ &+ h_1 H_1(x) \left(\frac{D^{m-1} \mathbf{N}[\Phi(x, y; q), \Lambda(q)]}{Dq^{m-1}} \right) \Big|_{q=0} \\ &- C_0^2 \mathbf{R}_m[\Phi_{xx}(x, y; q), \Lambda(q)] \\ &- g \mathbf{R}_m[\Phi_y(x, y; q), \Lambda(q)] \\ &- \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{D^i [\Lambda^2(q)]}{Dq^i} \frac{D^{m-1} \Phi_{xx}(x, y; q)}{Dq^{m-1}} \Big|_{q=0} \end{aligned} \quad (2.21)$$

dan $\vec{\phi}_m = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$, $\vec{\zeta}_m = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m)$, $\vec{C}_m = (C_1, C_2, \dots, C_m)$

3. APLIKASI DAN HASIL NUMERIK

Berdasarkan uraian pada bagian sebelumnya, maka berikut ini langkah-langkah numerik yang harus dilakukan untuk menyelesaikan masalah nilai batas (2.1) – (2.4).

- 1 Misalkan diberikan solusi pendekatan awal masalah nilai batas (2.1) – (2.4) sebagai berikut:

$$\phi_0(x, y) = AC_0 \exp(ky) \sin(kx), \text{ dan } \zeta_0(x) = 0,$$

- 2 Menentukan solusi pendekatan untuk orde m dari masalah nilai batas (2.1) – (2.4). Fungsi $\phi_m(x, y)$ diperoleh berdasarkan rumus rekursif yang diberikan oleh persamaan (2.20), berikut di $y = \zeta_0(x)$,

$$C_0^2 \frac{\partial^2 \phi_m(x, y)}{\partial x^2} + g \frac{\partial \phi_m(x, y)}{\partial y} = S_m(x, \vec{\phi}_{m-1}, \vec{\zeta}_m, \vec{C}_m),$$

dengan $S_m(x, \vec{\phi}_{m-1}, \vec{\zeta}_m, \vec{C}_m)$ diberikan pada persamaan (2.21). Bentuk $S_m(x, \vec{\phi}_{m-1}, \vec{\zeta}_m, \vec{C}_m)$ akan dijelaskan pada bagian selanjutnya. Fungsi $\zeta_m(x)$ diperoleh berdasarkan rumus rekursif yang diberikan oleh persamaan (2.19).

- 3 Menentukan solusi pendekatan masalah nilai batas (2.1) – (2.4) yang dinyatakan dalam persamaan (2.11) – (2.13).

Berikut ini akan dibahas penyederhanaan bentuk $S_m(x, \vec{\phi}_{m-1}, \vec{\zeta}_m, \vec{C}_m)$ agar penyelesaian dari persamaan (2.20) dapat ditentukan. Berdasarkan persamaan (2.5) - (2.6) dan persamaan (2.19) - (2.20) dapat dipilih fungsi bantu $\mathcal{H}_1(x)$ dan $\mathcal{H}_2(x)$ berikut

$$\mathcal{H}_1(x) = \cos(n_1 kx) \text{ dan } \mathcal{H}_2(x) = \cos(n_2 kx),$$

dengan n_1, n_2 bilangan bulat. Untuk penyederhanaan, pilih $n_1 = n_2 = 0$ sehingga $\mathcal{H}_1(x) = \mathcal{H}_2(x) = 1$. Selain itu, misalkan $h_1 = h_2 = h$.

Berdasarkan persamaan (2.20), $S_m(x, \vec{\phi}_{m-1}, \vec{\zeta}_m, \vec{C}_m)$ dapat dimisalkan dalam bentuk

$$S_m(x, \vec{\phi}_{m-1}, \vec{\zeta}_m, \vec{C}_m) = \sum_{n=1}^m b_{m,n}(\vec{C}_m) \sin(nkx), \text{ untuk } m \geq 1, \quad (3.1)$$

dengan $b_{m,n}(\vec{C}_m)$ menyatakan koefisien yang bergantung pada vektor \vec{C}_m .

Untuk menentukan penyelesaian dari persamaan (2.20), maka misalkan solusi persamaan tersebut dalam bentuk

$$\phi_m(x, y) = \sum_{n=1}^m a_{m,n} \exp(nky) \sin(nkx). \quad (3.2)$$

Jika persamaan (3.1) dan (3.2) disubstitusi ke dalam persamaan (2.20), maka diperoleh

$$a_{m,n} = \frac{b_{m,n}(\vec{C}_m)}{(kn)g - C_0^2(kn)^2}, \text{ untuk } 2 \leq n \leq m \quad (3.3)$$

Untuk $n = 1$, bentuk $a_{m,1}$ diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.5) dan (2.6), yaitu memenuhi persamaan berikut:

$$\alpha_{m,1}a_{m,1} + \beta_{m,1} = 0 \tag{3.4}$$

dengan $\alpha_{m,1}$ dan $\beta_{m,1}$ suatu konstanta. Selanjutnya, karena

$$\zeta_m(0) - \zeta_m(L/2) = \begin{cases} H, & \text{untuk } m = 1, \\ 0, & \text{untuk } m \geq 2, \end{cases}$$

maka nilai A pada penyelesaian pendekatan awal dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.19) dan (3.5), yaitu:

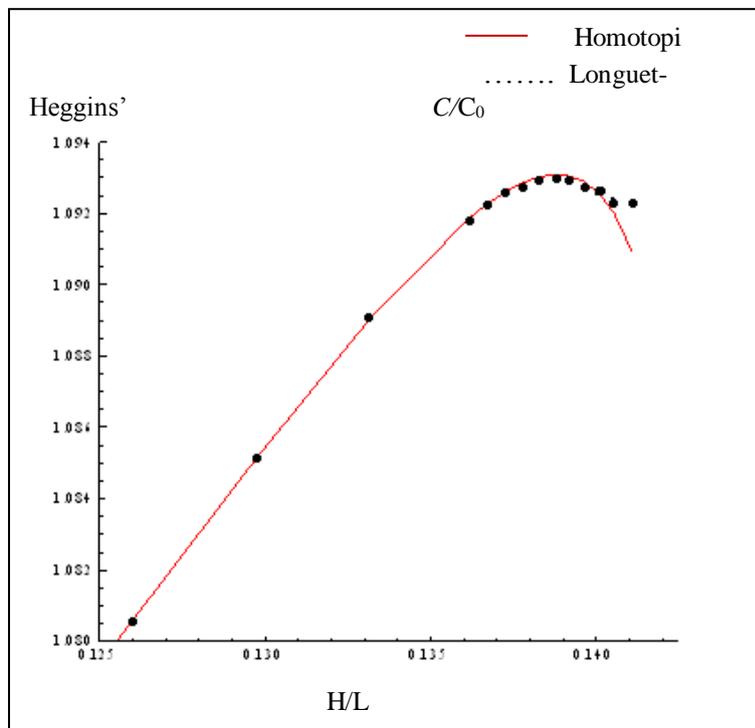
$$A = -\frac{gH}{2\hbar k C_0^2} \quad \text{atau} \quad A = -\frac{H}{2\hbar}.$$

Selain itu, diperoleh pula bahwa $b_{m,1}(\vec{C}_m) = 0$, untuk $m \geq 1$. Hal ini disebabkan karena apabila $b_{1,1}(\vec{C}_1) \neq 0$ dan $b_{2,1}(\vec{C}_2) \neq 0$, maka dari persamaan (2.53) dan (2.55) diperoleh bahwa solusi persamaan (3.2), yaitu $\phi_m(x, y)$ tidak memiliki bentuk seperti pada persamaan (2.5). Dengan demikian vektor \vec{C}_m dapat diketahui, yaitu memiliki bentuk

$$\frac{C}{C_0} = f(k, H).$$

dengan f suatu fungsi yang bergantung pada k dan H.

Gambar 1 berikut ini menunjukkan hubungan kecepatan fase C/C_0 terhadap kecuraman gelombang H/L , dengan $k = 2\pi/L$ dan H/L bervariasi dari 0 hingga 0,14.



Gambar 1 Hubungan antara kecepatan fase C/C_0 dengan kecuraman gelombang H/L .

Hasil dengan metode homotopi pada tulisan ini dibandingkan dengan hasil yang telah diperoleh dari Longuet-Higgins dalam (Longuet-Higgins, 1978).

Berdasarkan Gambar 1 diperoleh bahwa dengan metode homotopi yang dibahas dalam tulisan ini mempunyai hasil yang konsisten dengan hasil yang diperoleh dari Longuet-Higgins pada selang H/L dari 0 hingga 0,14. Dalam Gambar 1 juga diperoleh bentuk kecepatan fase C/C_0 tidak monoton naik dan mencapai kecepatan fase maksimum pada saat $H/L=0,138$ hasil ini juga konsisten dengan hasil yang diperoleh dari Longuet-Higgins.

4 KESIMPULAN

Metode homotopi adalah suatu metode pendekatan analitik untuk menentukan solusi dari masalah taklinear. Metode ini dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian dari masalah gelombang permukaan. Dalam metode ini diperlukan suatu operator yang dipilih berdasarkan persamaan taklinear yang muncul dalam model persamaan. Pemilihan operator ini harus menjamin kekonvergenan dari deretan penyelesaian. Deretan penyelesaian tersebut diperoleh berdasarkan rumus rekursif yang dikonstruksi dalam penelitian ini.

Hasil yang diperoleh dari penelitian ini berupa hampiran untuk kecepatan potensial, simpangan dan kecepatan phase gelombang permukaan. Selain itu, dengan menggunakan bantuan *software Maple*, diperoleh pula grafik antara kecepatan phase gelombang permukaan dengan kecuraman gelombang. Berdasarkan grafik yang dihasilkan, diperoleh bahwa bentuk kecepatan fase gelombang tidak monoton naik dan mencapai kecepatan fase maksimum pada saat kecuraman mencapai 0,138. hasil ini juga konsisten dengan hasil yang diperoleh dari Longuet-Higgins.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. **Chen B, Saffman PG.** 1980. Numerical evidence for the existence of new types of gravity waves of permanent form of deep water. *Studies in Appl. Math* 62:1-21.
- [2]. **Liao.** 2004. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*. Boca Raton, London, New York Washington, D.C.
- [3]. **Longuet, Higgins MS.** 1978. The instability of gravity of finite amplitude in deep water: subharmonics. *Proc. R. Soc. Lond. A* 360: 471-488.
- [4]. **Schwartz LW.** 1974. Computer extension and analytic continuitas of Stokes' expansion for gravity waves. *J.of Fluid Mech* 62(3): 553-578.
- [5]. **Stokes GG.** 1883. On the highest waves of uniform propagation. *Proc. Cambridge Phil. Soc* 4: 361-365.