ANALISIS MODEL PELUANG BERTAHAN HIDUP (*SURVIVAL*) DAN APLIKASINYA

S. FAJARIYAH[1], H. SUMARNO[2], N. K. K. ARDHANA[2]

Abstract

Up till now, models of demography mathematics usually use discrete approximation. This research will use continue approximation agree with demography characteristic that always change every times. The Maximum Likelihood method is chosen by using five distributions. There are two data that use i.e. hypothetic data and life table data of Banten. The result of hypothetic data shows that if we choose real distribution, it will produce the good value of R^2, whereas with survival data of Banten. The result shows that Weibull distribution is the best from another distributions.
Keywords: survival function, maximum likelihood method.

1 PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Mortalitas atau kematian merupakan salah satu di antara tiga komponen demografi yang dapat mempengaruhi perubahan penduduk, selain fertilitas (kelahiran) dan migrasi. Informasi tentang kematian penting baik bagi pemerintah maupun lembaga swasta. Salah satu diantaranya adalah perlunya angka peluang kematian menurut umur dalam proyeksi penduduk. Secara umum informasi tentang peluang kematian menurut umur suatu wilayah disajikan dalam bentuk tabel, yang dikenal dengan sebutan *life table* (tabel hayat/tabel mortalitas).

Seperti telah dijelaskan sebelumnya, tabel hayat merupakan komponen penting dalam proyeksi penduduk, di samping fertilitas dan migrasi. Selanjutnya proyeksi penduduk dapat digunakan dalam bidang pendidikan yaitu untuk memperkirakan jumlah penduduk usia sekolah, jumlah murid, jumlah guru, gedung-gedung sekolah dan pendidikan pada masa yang akan datang (Pollard *et al*. 1982). Selain itu model tabel hayat juga dapat diaplikasikan dalam bidang pendidikan untuk menduga angka harapan melanjutkan sekolah dan tingkat putus sekolah.

Pada negara yang masih belum memiliki data statistik vital yang lengkap, tabel hayat secara umum diperoleh dari model Coale-Demeny, yaitu berupa kumpulan tabel hayat yang disajikan dalam bentuk diskret pada berbagai level.

---

[1]Alumnus Program Studi Matematika Terapan, Sekolah Pascasarjana IPB.
[2]Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

Sehingga apabila ada perubahan tingkat mortalitas, maka tabel hayat yang lain harus dihitung kembali. Salah satu alternatif yang dapat dilakukan agar proses penyusunan tabel hayat dapat lebih sederhana adalah dengan membuat tabel hayat menjadi fungsi kontinu.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini ialah

1 melakukan pendugaan parameter fungsi *Survival* terhadap sebaran yang sering digunakan,

2 mengaplikasikan fungsi *Survival* terhadap data tabel hayat Banten tahun 2005 untuk memperoleh model fungsi *Survival* Banten.

2 METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Sumber Data

Penelitian ini menggunakan dua jenis data, yaitu:

1 Data hipotetik.

2 Data *Survival* Banten (data tabel hayat Banten tahun 2005).

Data hipotetik digunakan untuk melakukan pendugaan parameter beberapa fungsi *Survival*, Sedangkan untuk aplikasi model digunakan data *Survival* Banten.

2.2 Langkah-langkah Penelitian

1 Membangkitkan data hipotetik, kemudian melakukan pendugaan parameter dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood* terhadap sebaran-sebaran Eksponensial, Weibull, Log-normal, Log-logistik dan Gompertz.

2 Dengan menggunakan data *Survival* Banten dan metode *Maximum Likelihood*, dilakukan pendugaan parameter terhadap sebaran Eksponensial, Weibull, Log-normal, Log-logistik dan Gompertz untuk memperoleh model fungsi *Survival* Banten.

3 Untuk menguji kesesuaian data dan model dilakukan uji R^2 (koefisien determinasi).

3 MODEL FUNGSI *SURVIVAL*

3.1 Fungsi Survival

Fungsi *Survival* $S(x)$ adalah fungsi yang menyatakan peluang seseorang dapat bertahan hidup hingga atau lebih dari waktu x, yang didefinisikan sebagai berikut: $S(x) = P(X \geq x)$, dengan peubah acak X menyatakan waktu bertahan hidup. Fungsi *Survival* merupakan fungsi tak naik, pada saat $x = 0, \quad S(x) = 1; \quad x \to \infty, \quad S(x) \to 0$

Pada TABEL 1 di bawah ini disajikan fungsi *Survival* dari sebaran-sebaran Eksponensial, Weibull, Log-normal, Log-logistik dan Gompertz.

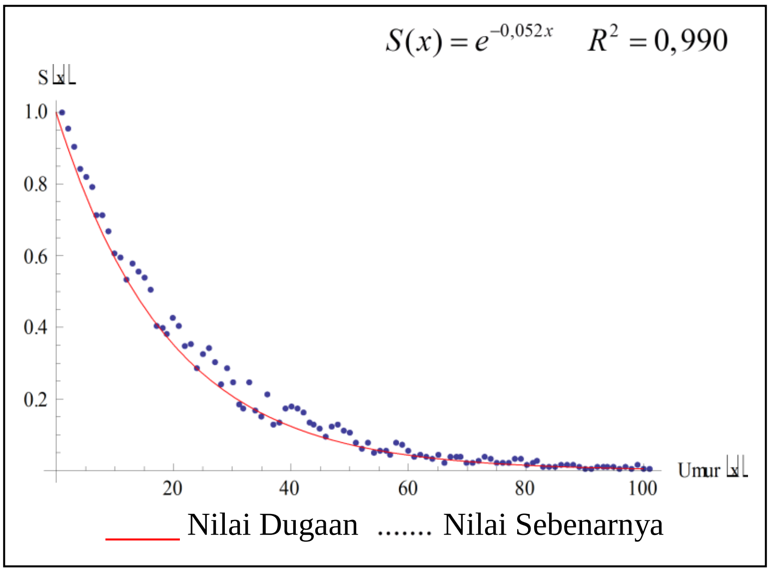
TABEL 1
Tabel sebaran dan fungsi *Survival* $S(x)$

Sebaran	Fungsi *Survival* $S(x)$
1. Eksponensial	$S(x) = e^{-\lambda x}$
2. Weibull	$S(x) = e^{-(\frac{1}{\gamma}x)^{\lambda}}$
3. Log-normal	$S(x) = 1 - \int_0^{\frac{\text{Log}[x]-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)} dt$
4. Log-logistik	$S(x) = \frac{1}{1+e^{\theta}x^{k}}$
5. Gompertz	$S(x) = e^{-\frac{e^{\lambda}(-1+e^{\gamma x})}{\gamma}}$

4 HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Pendugaan Parameter Fungsi *Survival* Sebaran Eksponensial

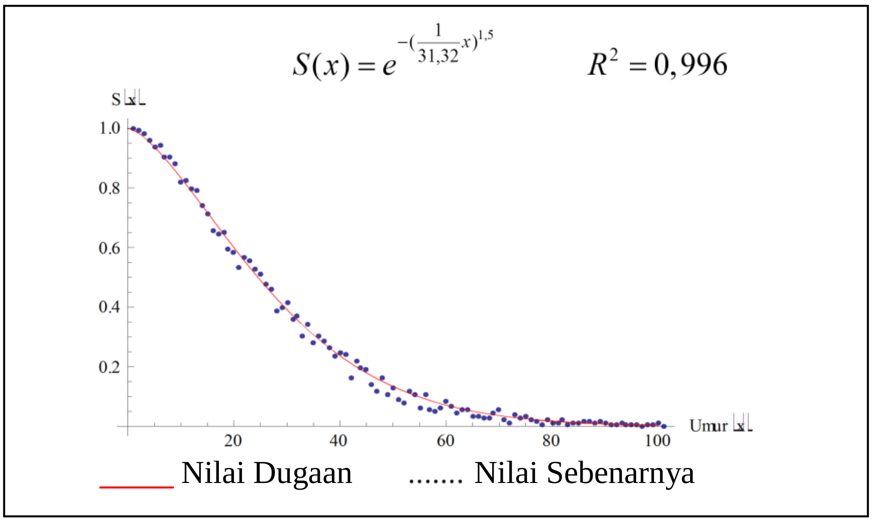
Dengan menggunakan data hipotetik yang dibangkitkan berdasarkan parameter $\lambda = 0{,}05$ + RandomReal [{-0,007 , 0,007}], dilakukan pendugaan parameter terhadap sebaran Eksponensial, dibantu *Software* Fungsional dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood*. Hasil pendugaan parameter diperoleh persamaan fungsi *Survival* pada sebaran Eksponensial adalah $S(x) = e^{-0{,}052x}$, seperti terlihat pada Gambar 1 di bawah ini.



Gambar 1. Kurva fungsi *Survival* sebaran Eksponensial

4.2 Pendugaan Parameter Fungsi *Survival* Sebaran Weibull

Dengan menggunakan data hipotetik yang dibangkitkan berdasarkan parameter $\lambda = 1{,}5$ + RandomReal [{-0,2 , 0,2}] dan $\gamma = 30$ + RandomReal [{-2 , 2}], dilakukan pendugaan parameter terhadap sebaran Weibull, dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood*. Hasil pendugaan parameter diperoleh persamaan fungsi *Survival* sebaran Weibull adalah $S(x) = e^{-(\frac{1}{31,32}x)^{1,5}}$, seperti terlihat pada Gambar 2 di bawah ini.



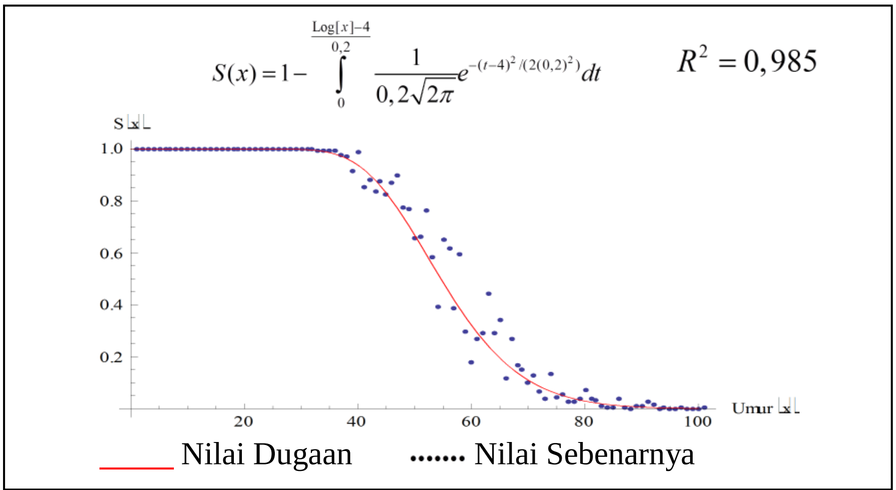
Gambar 2. Kurva fungsi *Survival* sebaran Weibull

4.3 Pendugaan Parameter Fungsi *Survival* Sebaran Log-normal

Dengan menggunakan data hipotetik yang dibangkitkan berdasarkan parameter $\mu = 4$ + RandomReal [{-0,1 , 0,1}] dan $\sigma = 0{,}2$ + RandomReal [{-0,02 , 0,02}], dilakukan pendugaan parameter terhadap sebaran Log-normal, dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood*. Hasil pendugaan parameter diperoleh persamaan fungsi *Survival* sebaran Log-normal adalah

$$S(x) = 1 - \int_0^{\frac{\mathrm{Log}[x]-4}{0,2}} \frac{1}{0{,}2\sqrt{2\pi}} e^{-(t-4)^2/(2(0,2)^2)}\,dt \,,$$

seperti terlihat pada Gambar 3 di bawah ini.

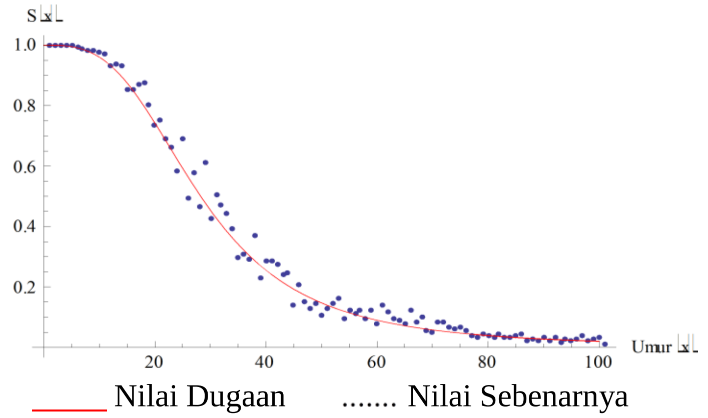


Gambar 3. Kurva fungsi *Survival* sebaran Lognormal

4.4 Pendugaan Parameter Fungsi *Survival* Sebaran Log-logistik

Dengan menggunakan data hipotetik yang dibangkitkan berdasarkan parameter $\theta = -10$ + RandomReal [{-0,4 , 0,4}] dan $\kappa = 3$ + RandomReal [{-0,05 , 0,05}] dilakukan pendugaan parameter terhadap sebaran Log-logistik dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood*. Hasil pendugaan parameter diperoleh persamaan fungsi *Survival* sebaran Log-logistik $S(x) = \frac{1}{1+e^{-10,27}x^{3,07}}$, seperti pada Gambar 4 di bawah ini. :

$$S(x) = \frac{1}{1+e^{-10,27}x^{3,07}}, \qquad R^2 = 0,992$$



Gambar 4. Kurva fungsi *Survival* sebaran Log-logistik

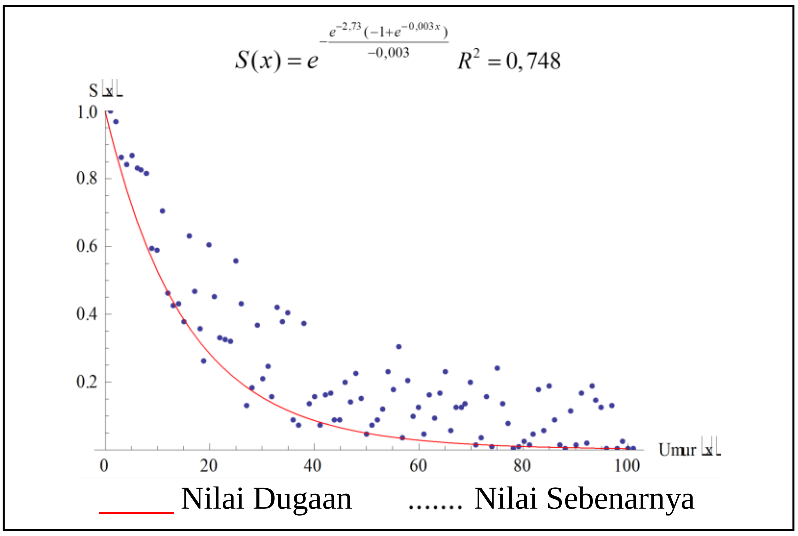
4.5 Pendugaan Parameter Fungsi *Survival* Sebaran Gompertz

Dengan menggunakan data hipotetik yang dibangkitkan berdasarkan parameter $\lambda =$-3 + RandomReal [{-0,6 , 0,6}] dan $\gamma =$ -0,01 + RandomReal [{-0,001 , 0,001}], dilakukan pendugaan parameter terhadap sebaran Gompertz, dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood*. Hasil pendugaan parameter diperoleh persamaan fungsi *Survival* sebaran Gompertz adalah $S(x) = e^{-\frac{e^{-2,73}(-1+e^{-0,003x})}{-0,003}}$, seperti terlihat pada Gambar 5 di bawah ini.

Untuk melihat sejauh mana model dapat menggambarkan kondisi yang sebenarnya, digunakan formula sebagai berikut,

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

dengan y_i =aktual, $\hat{y}_i$ = dugaan, dan $\bar{y}$ =rata-rata.



Gambar 5. Kurva fungsi *Survival* sebaran Gompertz

Nilai R^2 hasil pendugaan parameter dari beberapa sebaran *Survival* di atas disajikan pada TABEL 2.

TABEL 2

Perbandingan nilai R^2 fungsi *Survival*

	Eksponensial	Weibull	Log-normal	Log-logistik	Gompertz
R^2	0,990	0,996	0,985	0,992	0,748

Keterangan: Nilai R^2 dinilai baik jika mendekati 1.

Berdasarkan hasil di atas dapat dinyatakan bahwa j dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood*, dengan memilih sebaran yang tepat, akan diperoleh hasil dugaan paameter yang sangat baik. Oleh karena itu hal yang paling penting dalam pemilihan model adalah berdasarkan kesesuaian antara data yang kita ambil dengan model teoritis yang akan digunakan untuk menyuai data tersebut.

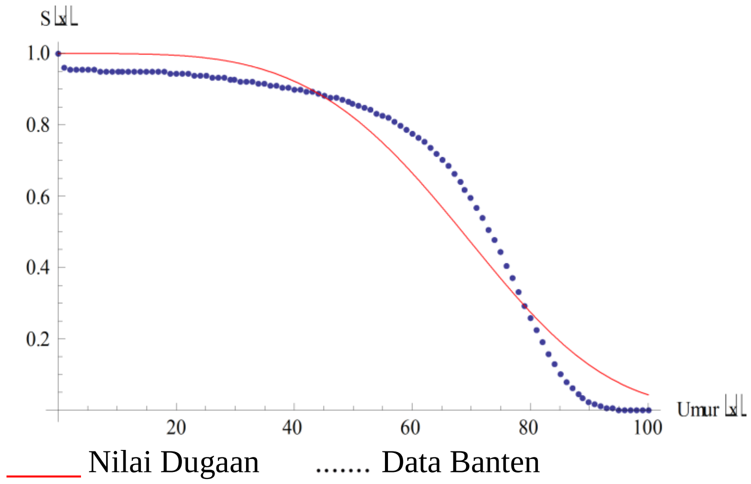
Pendugaan Parameter Fungsi *Survival* Banten

Selanjutnya akan dicoba untuk melakukan penyuaian data survival Propinsi Banten dengan menggunakan sebaran-sebaran di atas. Sebaran Eksponensial dan Gompertz tidak dapat digunakan karena memiliki pola yang berbeda dengan pola sebaran data survibal Propinsi Banten. Hasil penyuaian dengan menggunakan sebaran Weibull, Log-normal, dan Log-logistik terhadap data *Survival* Banten, diperoleh model fungsi *Survival* Banten sebagai berikut.

1 Sebaran Weibull

Hasil pendugaan parameter pada data *Survival* Banten terhadap sebaran Weibull dapat dilihat pada Gambar 6.

$$S(x) = e^{-\left(\frac{1}{75,04}x\right)^4} \qquad R^2 = 0,958$$

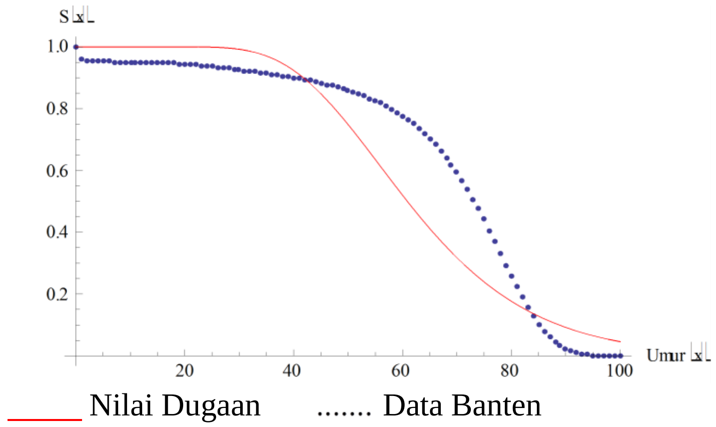


Gambar 6. Kurva fungsi *Survival* Banten (kurva mulus) sebaran Weibull

2 Sebaran Log-normal

Hasil pendugaan parameter pada data *Survival* Banten dengan sebaran Log-normal dapat dilihat pada Gambar 7.

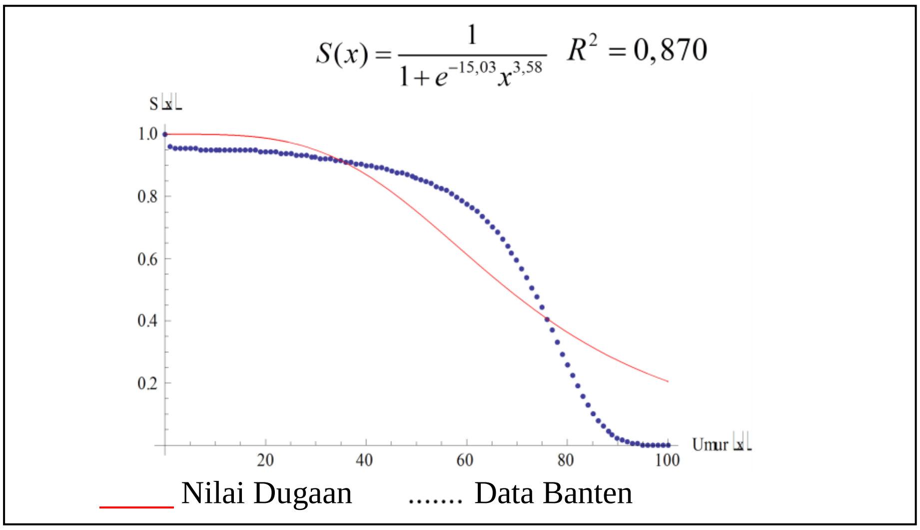
$$S(x) = 1 - \int_0^{\frac{\mathrm{Log}[x]-4,11}{0,29}} \frac{1}{0,29\sqrt{2\pi}} e^{-(t-4,11)^2/(2(0,29)^2)} dt \quad R^2 = 0,852$$



Gambar 7. Kurva fungsi *Survival* Banten (kurva mulus) sebaran Log-normal

3 Sebaran Log-logistik

Hasil pendugaan parameter pada data *Survival* Banten dengan sebaran Log-logistik dapat dilihat pada pada Gambar 8.



Gambar 8. Kurva fungsi *Survival* Banten (kurva mulus) sebaran Log-logistik

Nilai R^2 hasil pendugaan parameter terhadap data survival propinsi Banten dari tiga sebaran di atas disajikan pada TABEL 3.

TABEL 3

Perbandingan nilai R^2 dan *PE* fungsi *Survival*

	Weibull	Log-normal	Log-logistik
R^2	0,958	0,852	0,870

Dari TABEL 3 terlihat bahwa sebaran Weibull mampu memberikan pendugaan yang baik dibandingkan dengan sebaran Log-normal dan Log-logistik dengan persamaan fungsi *Survival* $S(x)=e^{-(\frac{1}{75,04}x)^4}$.

5 SIMPULAN

Simpulan dari penelitian ini ialah

1 metode *Maximum Likelihood* dapat digunakan untuk melakukan pendugaan parameter terhadap fungsi *Survival* bila dapat memilih sebaran yang tepat,

2 model tabel hayat dapat didekati dengan model kontinu, yaitu dengan menggunakan sebaran Weibull, Log-normal dan Log-logistik,

3 berdasarkan metode *Maximum Likelihood* dengan menggunakan data *Survival* Banten, sebaran Weibull merupakan sebaran yang terbaik dari sebaran-sebaran lain.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Agresti, Finlay. 1986. *Statistical Methods for the Social Sciences*. 2nd Ed. California. D. ellen Publishing Company.

[2] Brown RL. 1997. *Introduction to the Mathematics of Demography*. 3rd Ed. Winsted: Actec Publications.

[3] Coale AJ , Demeny P. 1983. *Regional Model Life Tables and Stable Population.* 2nd Ed. New York: Academic Press.

[4] Lee ET. 1992. *Statistical Methods for Survival Data Analysis*. 2nd Ed. New York: A Wiley Interscience Publication.

[5] Pollard AH, Yusuf Farhat, Pollard GN. 1982. *Teknik Demografi*. Munir Rozy, Budiarto, penerjemah, Jakarta: Bina Aksara. Terjemahan dari: De*mographic Techniques.*